Redes de Petri:

Modelado, Análisis y Evaluación de Prestaciones

Objetivos

- Comprender os conceptos fundamentales de teoria de redes de Petri.
- Modelar problemas de natureza concurrente, no determinísta, asíncrona etc.
- Conocer los métodos de análisis de propiedades cualitativas.
- Estudiar los modelos temporizados.
- Modelar problemas considerando aspectos temporales.
- Analizar prestaciones considerando los modelos temporales.

Indice

- Definiciones
- Clasificación
- Conceptos Básicos
- Modelos Semánticos
- Redes Elementales
- Modelado de Problemas Clásicos
- Clases

Propiedades
  Comportamiento
  Estructurales
Análisis Cualitativo
  Grafo de Marcados
  Ecuación de Estados
    Invariantes
  Redución
Modelado y Análisis de Problemas

Indice

Clasificación de los Modelos Temporizados
Transition Time PN
  Modelo Semántico
  Grafo de Estado
Transition Timed PN
  Modelo Semántico
  Grafo de Estado
Modelado
Análisis Cuantitativo

Revisión de Cadenas de Markov (MC)
SPN
  Grafo de estado (MC)
GSPN
  Grafo de Estado
  Cadena de Markov Empotrada
DSPN
Modelado y Análisis de Prestaciones

Indice

Modelos de Alto Nível
  Introducción a CPN

Bibliografía:

•Lectures on Petri Nets (Advances in Petri Nets) - Spring Verlag, Editado por W. Reisig, G Rozenberg
•Aplications of Petri nets in Manufacturing Systems. IEEE press. A. Desrochers, R. Al-Jaar,
•Pratice of Petri Nets in Manufacturing. Chapman & Hall. Dicesare et al.
•Hardware Design and Petri Nets. Kluwer. Editado por A Yakovlev et al.
•Performance Modelling with Deterministic and Stochastic Petri nets. Wiley. C. Lidemann.
•Performance Modelling of Automated Manufacturing Systems. Prentice Hall. Viswanadham and Narahari
•Petri net Theory and the Modelling of Systems. Prentice Hall. Peterson.

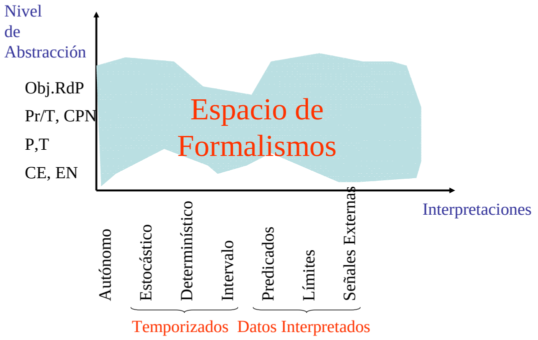
Redes de Petri

- Familia de técnicas de descripción formal
- Inicialmente propuesta por Carl A. Petri, en la Universidade de Darmstadt, Alemania, 1962
  - *Kommunikation mit Automaten*

Redes de Petri

- Áreas de Aplicación:
  - Concurrencia
  - Arquitetura de Computadores
  - Protocolo de Redes
  - Sistemas Operativos
  - Sistemas de Producción
  - Sistemas Digitales
  - *Hardware/Software Co-design*
  - Ingeniería de Software
  - Sistemas de Tiempo Real
  - Modelado y Análisis de Prestaciones
  - Diagnóstico de Fallos
  - Control de Tráfico
  - *Workflow*
  - Administración
  - Química
  - etc

Redes de Petri



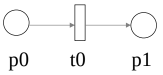
Redes de Petri

Componentes

○ Lugar

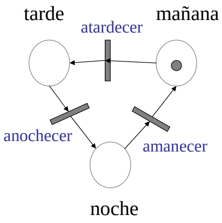
▭ Transición

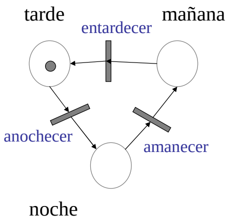
Red



Redes de Petri

- Períodos del Dia





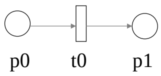
Redes de Petri

Componentes

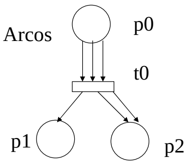
○ Lugar

▭ Transición

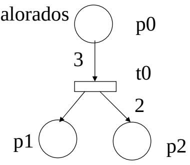
Red



Múltiples Arcos

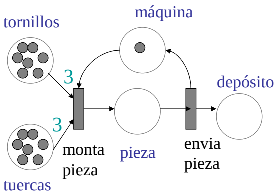


Arcos Valorados



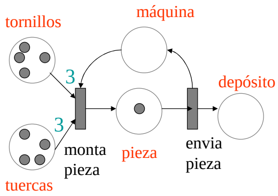
Redes de Petri

- Línea de Producción



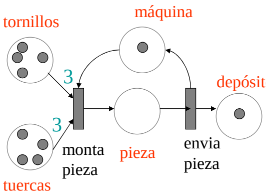
Redes de Petri

- Línea de Producción



Redes de Petri

- Línea de Producción

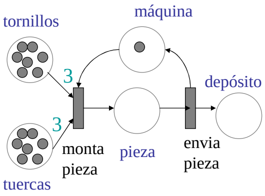


Redes de Petri

- Definición: *Place/Transition Nets* - Teoría *arcos* (multiconjuntos)
  - $N=(P,T,I,O,M_o)$
  - P - Conjunto de Lugares - P={p0, ..., pn}
  - T - Conjunto de transiciones - T={t0, ..., tm}
  - I - Conjunto de *arcos* de entrada - $I: P \rightarrow T^{\infty}$
  - O - Conjunto de *arcos* de salida - $O: T \rightarrow P^{\infty}$
  - M_0- Vector marcado inicial - $M_0: P \rightarrow N$

Redes de Petri

- Línea de Producción



$R_{LP}=(P,T,I,O,M_0)$

P={tornillos, tuercas, pieza, máquina depósito}

T={monta_pieza,envia_pieza}

I={I(monta_pieza),I(envia_pieza)}

O={O(monta_pieza),O(envia_pieza)}

I(monta_pieza)=[tornillos, tornillos, tornillos, tuercas, tuercas, tuercas, máquina],

I(envia_pieza)=[pieza]

O(monta_pieza)=[pieza]

O(envia_pieza)=[máquina, depósito]

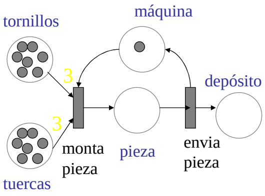
$M_0=|7,7,0,1,0|$

Redes de Petri

- Definición: *Place/Transition Nets* - Teoría Matricial
  - $N=(P,T,I,O,M_o)$
  - P - Conjunto de Lugares - P={p0, ..., pn}
  - T - Conjunto de transiciones - T={t0, ..., tm}
  - I - Matriz de entrada - $I: P \times T \rightarrow N$
  - O - Matriz de salida - $O: T \times P \rightarrow N$
  - M_0- Marcado inicial - $M_0: P \rightarrow N$

Redes de Petri

- Línea de Producción



$R_{LP}=(P,T,I,O,M_0)$

P={tornillos, tuercas, pieza, máquina depósito}

T={monta_pieza,envia_pieza}

$$I = \begin{array}{|cc|} \text{m\_p} & \text{e\_p} \\ 3 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \qquad O = \begin{array}{|cc|l} \text{m\_p} & \text{e\_p} & \\ 0 & 0 & \text{tornillos} \\ 0 & 0 & \text{tuercas} \\ 0 & 1 & \text{máquina} \\ 0 & 1 & \text{depósito} \\ 1 & 0 & \text{pieza} \end{array}$$

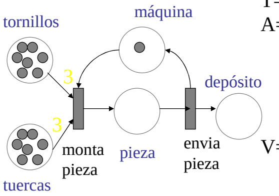
$M_0=|7,7,0,1,0|$

Redes de Petri

- Definición: *Place/Transition Nets* - Relación de Flujo
  - N=(P,T,A,V,M_o)
  - P - Conjunto de Lugares - Estados locales
  - T - Conjunto de transicioness - Acciones
  - A - Arcos - A ⊆ (P × T) ∪ (T × P)
  - V - Valoración - V: A → N
  - M_0- Marcado inicial - M_0:P → N
    - Sea X = P ∪ T
    - $^{\bullet}$x={y ”∈X | (x,y) ∈ A) - Conjunto de entrada
    - x$^{\bullet}$={y ”∈X | (x,y) ∈ A) - Conjunto de salida

Redes de Petri

- Linea de Producción



R_{LP}=(P,T,A,V,M_0)
P={tornillos, tuercas, pieza, máquina depósito}
T={monta_pieza,envia_pieza}
A={(tornillos, monta_pieza),(tuercas,
monta_pieza),(monta_pieza, pieza),
(pieza, envia_pieza),
(envia_pieza, máquina),
(envia_pieza, depósito)}
V=|3,3,1,1,1,1|

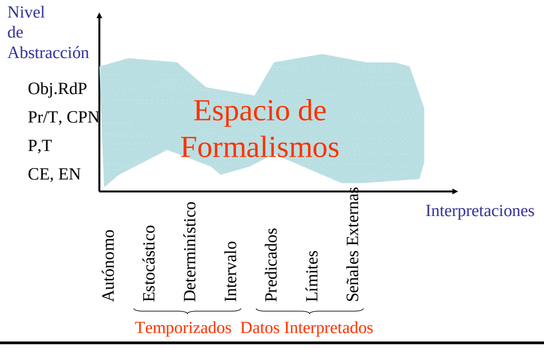
M_0=|7,7,0,1,0|

Redes de Petri

- **Clasificación**
  - Niveles de Abstracción — Modelo Representativo

Niveles de Abstracción	Modelo Representativo
• Fundamental	Elementary Net System Condition/Event Net
• Intermedio	Place/Transition Net
• Alto Nivel	CPN, Predicate/Transition Nets

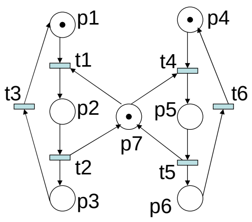
Redes de Petri



Redes de Petri

- P={p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6,p_7}
- T={t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6}

$$I = \begin{vmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&1&0&0 \end{vmatrix} \quad O = \begin{vmatrix} 0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&1&1&0&1&0 \end{vmatrix}$$



Redes de Petri

Semántica de Disparo de Transición

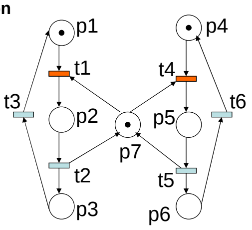
- Reglas de habilitación

M[tj> , M(pi) >=I(pi,tj)
∀ pi ∈P

- Reglas de disparo

Si M[tj>M'

M'(pi)=M_0(pi) - I(pi,tj) + O(pi,tj)
∀ pi ∈P



Redes de Petri

Semántica de Disparo de Transición

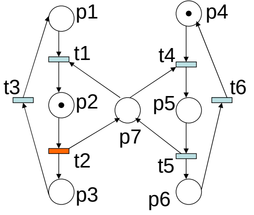
- Reglas de habilitación

M[tj> , M(pi) >=I(pi,tj)
∀ pi ∈P

- Reglas de disparo

Si M[tj>M'

M'(pi)=M_0(pi) - I(pi,tj) + O(pi,tj)
∀ pi ∈P



Redes de Petri

Semántica de Disparo de Transición

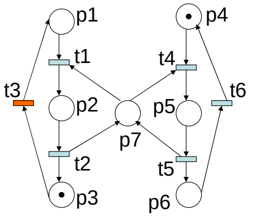
- Reglas de habilitación

M[tj> , M(pi) >=I(pi,tj)
∀ pi ∈P

- Reglas de disparo

Si M[tj>M'

M'(pi)= M_0(pi) - I(pi,tj) + O(pi,tj)
∀ pi ∈P



Redes de Petri

Semántica de Disparo de Transición

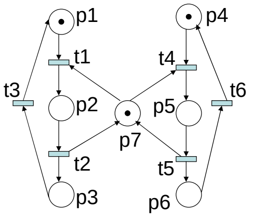
- Reglas de habilitación

M[tj> , M(pi) >=I(pi,tj)
∀ pi ∈P

- Reglas de disparo

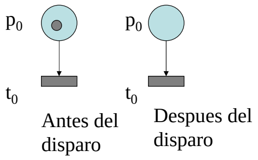
Si M[tj>M'

M'(pi)= M_0(pi) - I(pi,tj) + O(pi,tj)
∀ pi ∈P

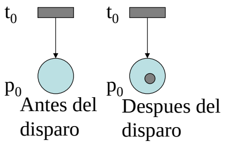


Redes de Petri

- Transición *Sink*

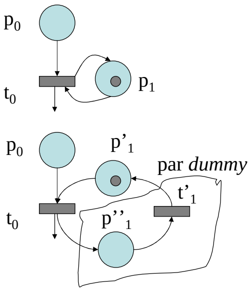


- Transición *Source*



Redes de Petri

- *Self-loop*



- Red Pura

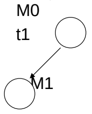
R=(P,T,I,O,) iif

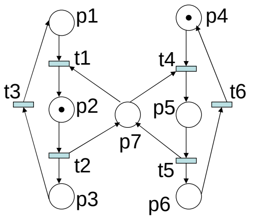
$I(p_j,t_i) \times O(p_j,t_i) = 0,$
$\forall t_i \in T, \forall p_j \in P$

O sea, red sin *self-loop*

Redes de Petri

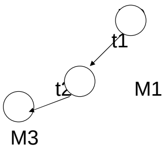
•**Grafo de Marcados Accesibles (Alcanzables)**

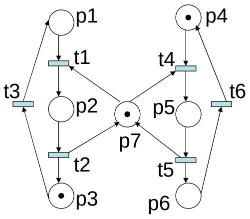




Redes de Petri

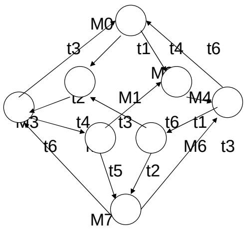
•Grafo de Marcados Accesibles (Alcanzables)

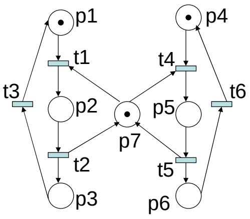




Redes de Petri

•Grafo de Marcados Accesibles (Alcanzables)





Redes de Petri

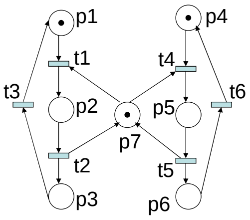
Sea M[tj>M'

M'(pi)=M0(pi) - I(pi,tj)+O(pi,tj)
∀ pi ∈P
M'(pi)=M0(pi) - I.s(tj)^T+O.s(tj) ^{T}
∀ pi ∈P
M'(pi)=M0(pi) +(O - I).s(tj)^T
∀ pi ∈P

Para una secuencia sq=t0,t1,...tk

M'(pi)=M0(pi) +(O - I).[s(t0)^T+...+ s(tk)^T]
∀ pi ∈P

M'(pi)=M0(pi) +C.$\overline{S}$, ∀ pi ∈P



Redes de Petri

- Ecuación de Estado

(Eq. Fundamental)

Sea M[tj>M'

M'(pi)=M0(pi) - I(pi,tj)+O(pi,tj)
∀ pi ∈P
M'(pi)=M0(pi) - I.s(tj)^T+O.s(tj) ^{T}
∀ pi ∈P
M'(pi)=M0(pi) +(O - I).s(tj)^T
∀ pi ∈P

Para una secuencia sq=t0,t1,...tk

M'(pi)=M0(pi) +(O - I). [s(t0)^T+ ...+ s(tk)^T], ∀ pi ∈P

Ecuación de Estado

M'(pi)=M0(pi) +C.$\overline{S}$, ∀ pi ∈P

Vector Característico (V. de Parikh)

$\overline{S}$ = [s(t0)^T+ ...+ s(tk)^T]

Redes de Petri

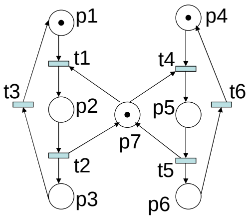
- Ecuación de Estados

M'(pi) = M_0(pi) + C × $\overline{s}$, ∀ pi ∈P

Matriz de Incidencia

C = O - I

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
m1 & = & 1 & & -1 \\
m2 & = & 0 & & 1 \\
m3 & = & 0 & & 0 \\
m4 & = & 1 & + & 0 \\
m5 & = & 0 & & 0 \\
m6 & = & 0 & & 0 \\
m7 & = & 1 & & -1
\end{array}$$



Redes de Petri

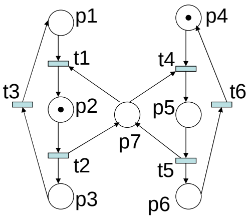
- Ecuación de Estados

M'(pi) = M_0(pi) + C × s, ∀ pi ∈P

Matriz de Incidencia

C = O - I

$$\begin{array}{|c|c|c|}
m1 & = & 0 \\
m2 & = & 1 \\
m3 & = & 0 \\
m4 & = & 1 \\
m5 & = & 0 \\
m6 & = & 0 \\
m7 & = & 0
\end{array}$$



Redes de Petri

Semántica de Paso Simple

(*single step)*

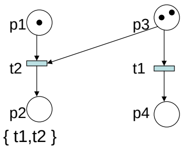
Step $\mathbf{s} \subseteq \mathbf{T}$

- Reglas de habilitación **s**

  $M[\mathbf{s}j>$, $M(pi) >= |O(pi) \cap s|$ $\forall$ pi $\in P$
- Reglas de disparo

  Sea $M[sj>M'$

  $M'(pi)=M0(pi) - |O(pi) \cap s| + |I(pi) \cap s|$, $\forall$ pi $\in P$



s = { t1,t2 }

$O(p1) = \{t2\} => |\{t2\} \cap \{ t1,t2 \}| = 1$

$M(p1) = 1$

$O(p3) = \{t1,t2\} => |\{t1,t2\} \cap \{ t1,t2 \}| = 2$

$M(p3) = 2$

Por tanto s es disparable

Redes de Petri

Semántica de Paso Simple

(*single step)*

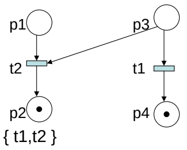
Step $\mathbf{s} \subseteq \mathbf{T}$

- Reglas de habilitación **s**

  $M[\mathbf{s}j>$, $M(pi) >= |O(pi) \cap s|$ $\forall$ pi $\in P$
- Reglas de disparo

  Sea $M[sj>M'$

  $M'(pi)=M0(pi) - |O(pi) \cap s| + |I(pi) \cap s|$, $\forall$ pi $\in P$



s = { t1,t2 }

$O(p1) = \{t2\} => |\{t2\} \cap \{ t1,t2 \}| = 1$

$M(p1) = 1$

$O(p3) = \{t1,t2\} => |\{t1,t2\} \cap \{ t1,t2 \}| = 2$

$M(p3) = 2$

Por tanto s es disparable

Redes de Petri

Semántica de Paso (*step)*

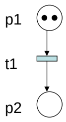
Step $\mathbf{s: T} \rightarrow \aleph$

- Reglas de habilitación **s**

  $M[\mathbf{s}j>$, $M(pi) >= \sum_{\forall t \in O(pi)} s(t)$ $\forall$ pi $\in P$
- Reglas de disparo

  Sea $M[sj>M'$

  $M'(pi)=M0(pi) - \sum_{\forall t \in O(pi)} s(t) + \sum_{\forall t \in I(pi)} s(t)$, $\forall$ pi $\in P$



$O(p1)=\{t1\}$

$s=s(t1) = 2$

$\sum_{t1 \in O(p1)} s(t1) = 2$

$M(p1) = 2$

$O(p2)=\emptyset$

$\sum_{t1 \in O(p2)} s(t1) = 0$

$M(p2) = 0$

Por tanto, s es disparable

Redes de Petri

Semántica de Paso (*step)*

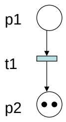
Step $\mathbf{s: T} \rightarrow \aleph$

- Reglas de habilitación **s**

  $M[\mathbf{s}j>$, $M(pi) >= \sum_{\forall t \in O(pi)} s(t)$ $\forall$ pi $\in P$
- Reglas de disparo

  Sea $M[sj>M'$

  $M'(pi)=M0(pi) - \sum_{\forall t \in O(pi)} s(t) + \sum_{\forall t \in I(pi)} s(t)$, $\forall$ pi $\in P$



$O(p1)=\{t1\}$

$s=s(t1) = 2$

$\sum_{t1 \in O(p1)} s(t1) = 2$

$M(p1) = 2$

$O(p2)=\emptyset$

$\sum_{t1 \in O(p2)} s(t1) = 0$

$M(p2) = 0$

Por tanto, s es disparable

Redes de Petri

Semántica de Paso (*step)*

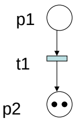
Step $\mathbf{s: T} \rightarrow \aleph$

- Reglas de habilitación **s**

  $M[\mathbf{s}j>$, $M(pi) >= \sum_{\forall t \in O(pi)} s(t)$ $\forall$ pi $\in P$
- Reglas de disparo

  Se $M[sj>M'$

  $M'(pi)=M0(pi) - \sum_{\forall t \in O(pi)} s(t) + \sum_{\forall t \in I(pi)} s(t)$, $\forall$ pi $\in P$



$s=s(t1) = 2$

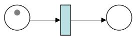
$\sum_{t1} s(t1) = 2$

$M(p1) = 2$

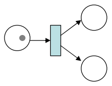
Por tanto, s es disparable

Redes Básicas

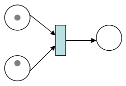
- Secuencia



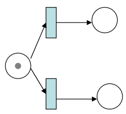
- Distribución



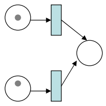
- Sincron.



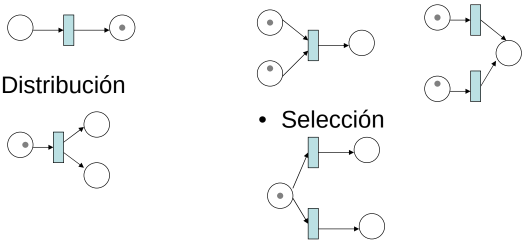
- Selección



Merging

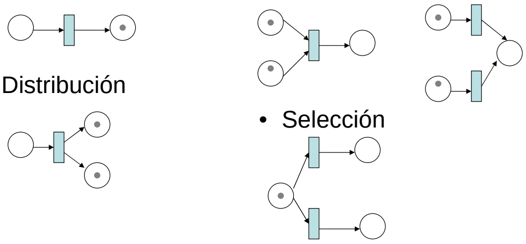


Redes Básicas



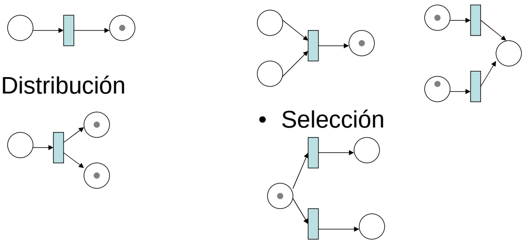
- Secuencia
- Distribución
- Sincron.
- Selección
- *Merging*

Redes Básicas



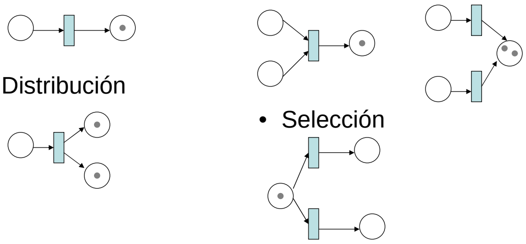
- Secuencia
- Distribución
- Sincron.
- Selección
- *Merging*

Redes Básicas



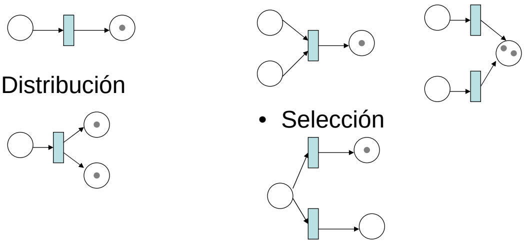
- Secuencia
- Distribución
- Sincron.
- Selección
- *Merging*

Redes Básicas



- Secuencia
- Distribución
- Sincron.
- Selección
- *Merging*

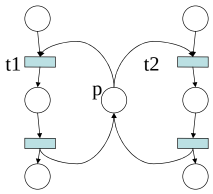
Redes Básicas



- Secuencia
- Distribución
- Sincron.
- Selección
- *Merging*

Conflicto Estructural

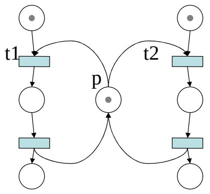
- N=(P,T,I,O), t1, t2 ∈ T están en conflicto estructural iif ∃p ∈ P tal que I(p,t1) × I(p,t2) ≠ 0



Conflicto Efectivo

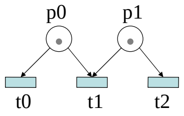
- N=(P,T,I,O,M_0), t1, t2 $\in$ T están en conflicto efectivo para M’ si está en conflicto estructual y M[t1>, M[t2> y

M(p) < I(p,t1) + I(p,t2)



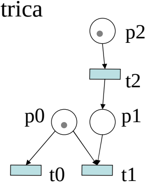
Confusión

- Simétrica



t0 y t2 son concurrentes, pero están en conflicto con t1. El disparo de t1 imposibilita el disparo de t0 y t2.

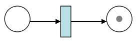
•Asimétrica



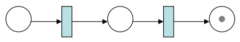
t0 y t2 son concurrentes, pero si t2 se dispara primero t0 e t1 estarán en conflicto efectivo.

Flujo de Control

- Computación Simple

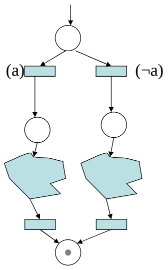


- Secuencia



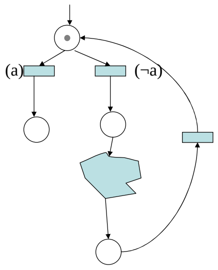
Flujo de Control

- If-then-else



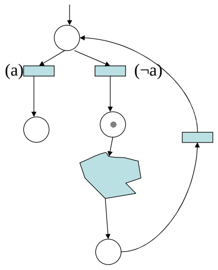
Flujo de Control

- While-do



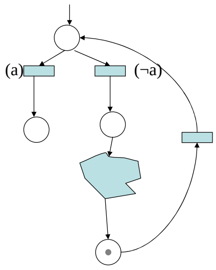
Flujo de Control

- While-do



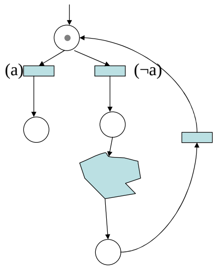
Flujo de Control

- While-do



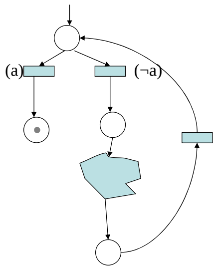
Flujo de Control

- While-do



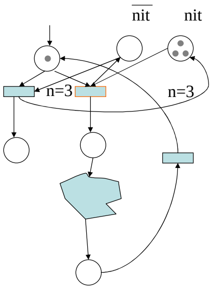
Flujo de Control

- While-do



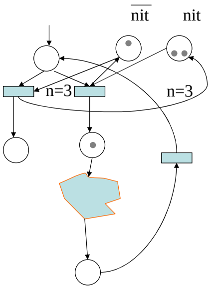
Flujo de Control

- For-do



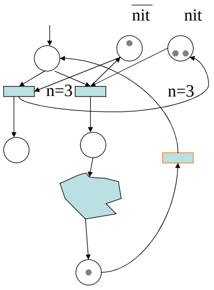
Flujo de Control

- For-do



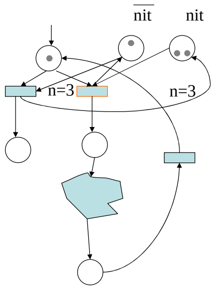
Flujo de Control

- For-do



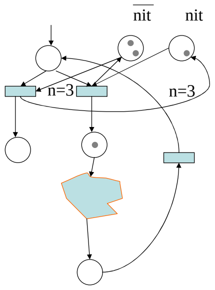
Flujo de Control

- For-do



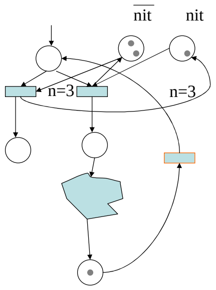
Flujo de Control

- For-do



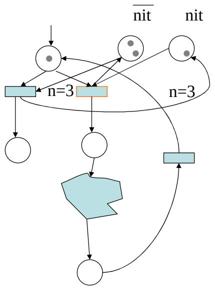
Flujo de Control

- For-do



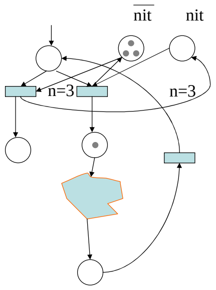
Flujo de Control

- For-do



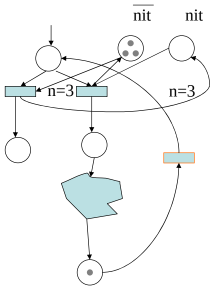
Flujo de Control

- For-do



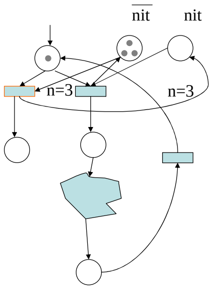
Flujo de Control

- For-do



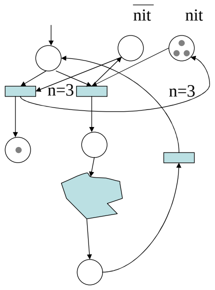
Flujo de Control

- For-do



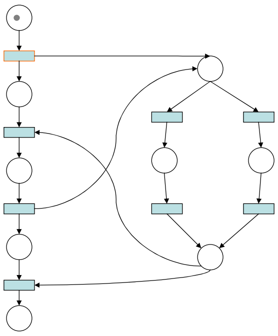
Flujo de Control

- For-do



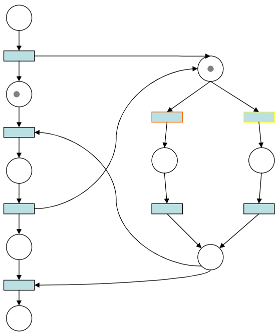
Flujo de Control

- Sub-rutina



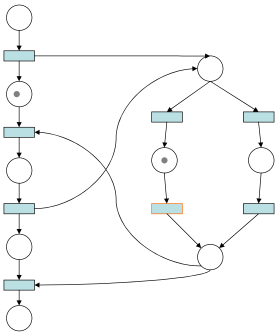
Flujo de Control

- Sub-rutina



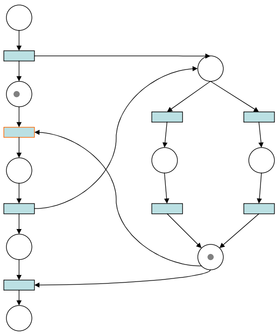
Flujo de Control

- Sub-rutina



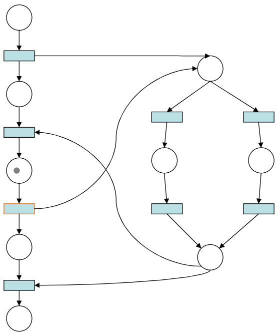
Flujo de Control

- Sub-rutina



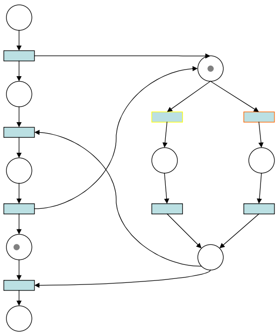
Flujo de Control

- Sub-rutina



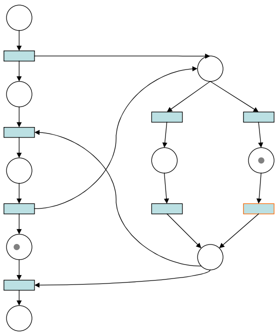
Flujo de Control

- Sub-rutina



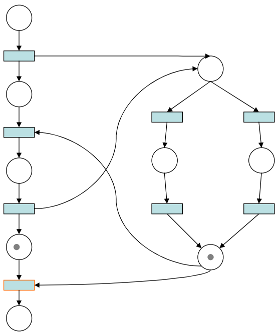
Flujo de Control

- Sub-rutina



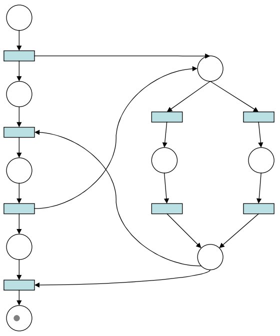
Flujo de Control

- Sub-rutina

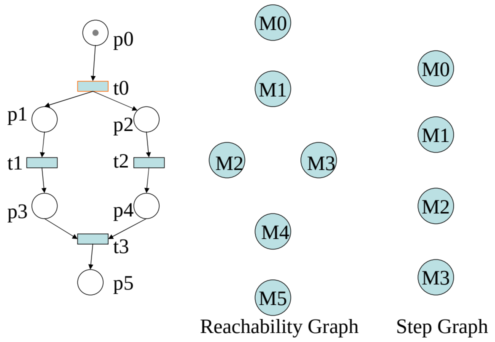


Flujo de Control

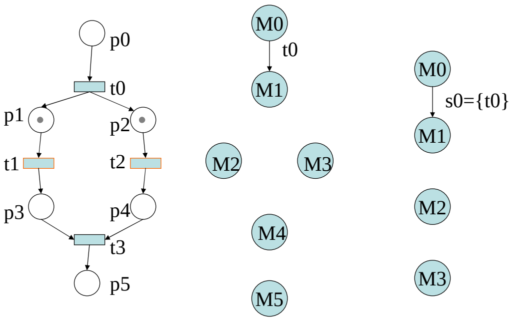
- Sub-rutina



Procesos Paralelos

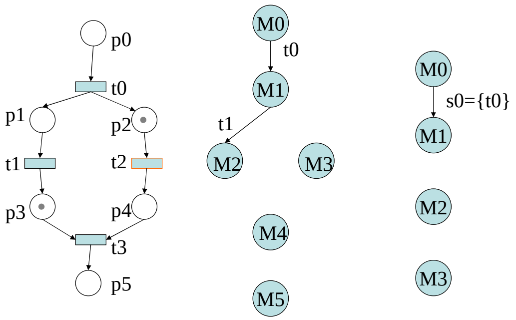


Procesos Paralelos



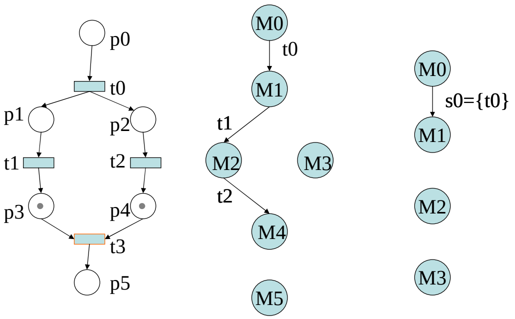
Reachability Graph Step Graph

Procesos Paralelos



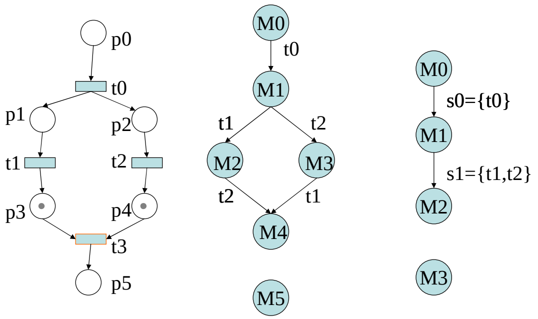
Reachability Graph Step Graph

Procesos Paralelos



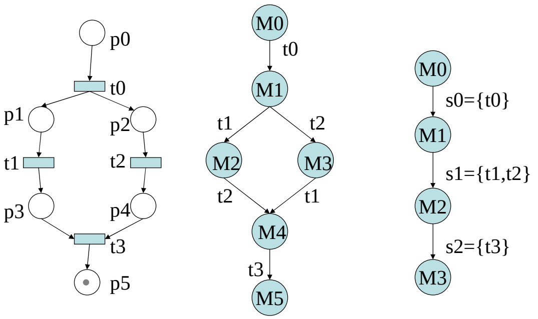
Reachability Graph Step Graph

Procesos Paralelos



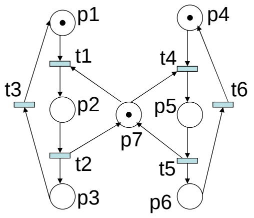
Reachability Graph Step Graph

Procesos Paralelos

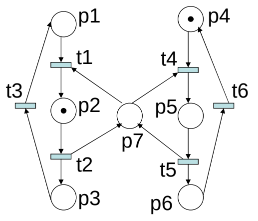


Reachability Graph Step Graph

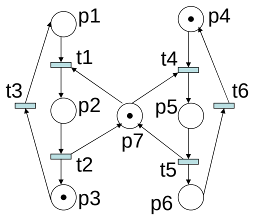
Exclusión Mútua



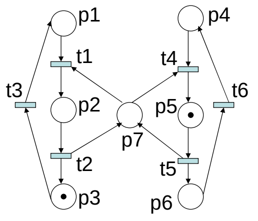
Exclusión Mútua



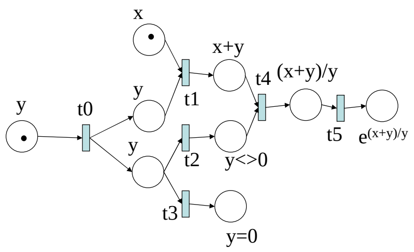
Exclusión Mútua



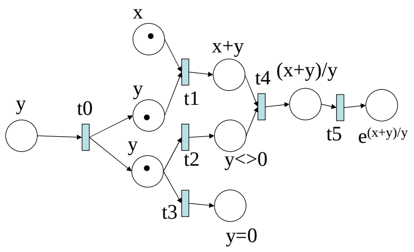
Exclusión Mútua



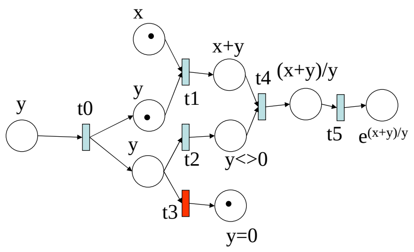
Computación Data-Flow



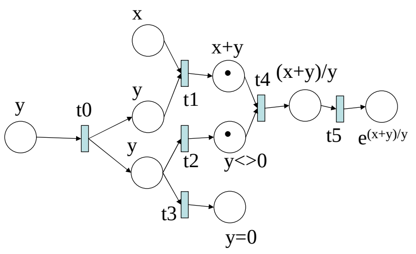
Computación Data-Flow



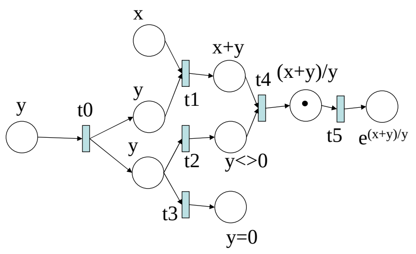
Computación Data-Flow



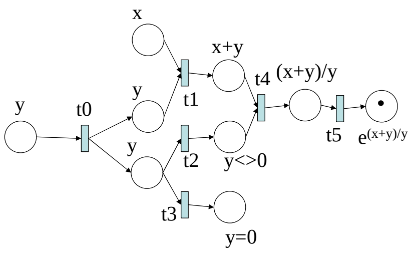
Computación Data-Flow



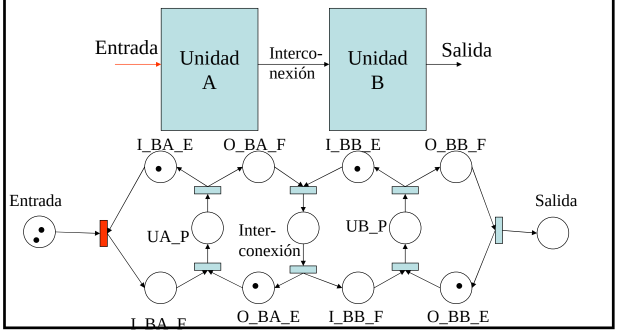
Computación Data-Flow



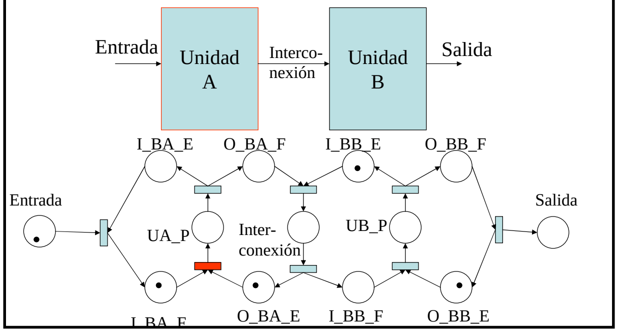
Computación Data-Flow



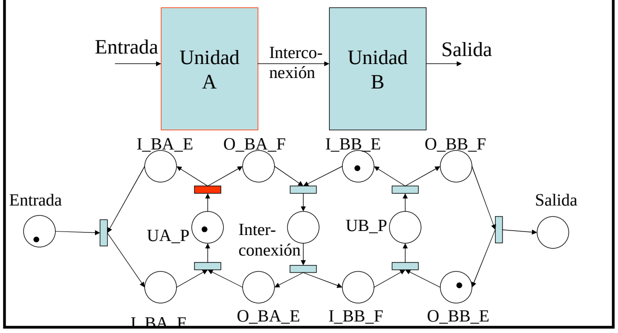
Pipeline



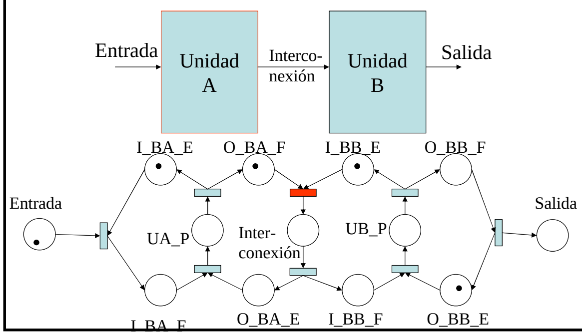
Pipeline



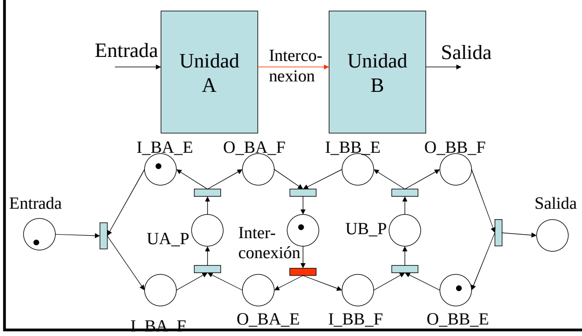
Pipeline



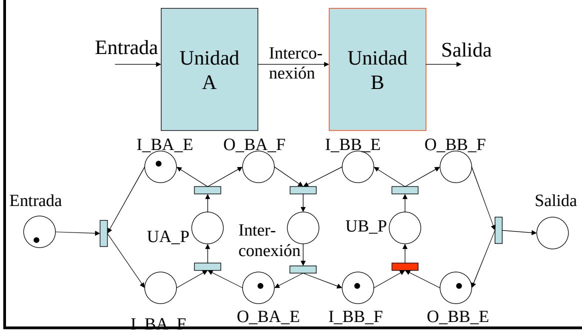
Pipeline



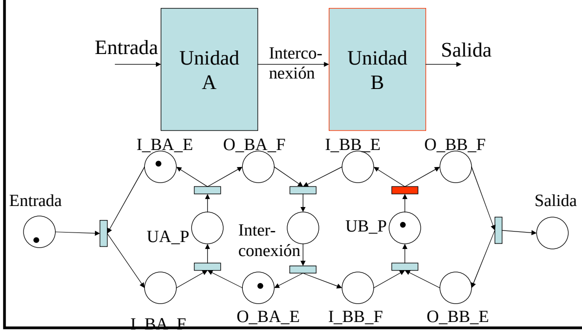
Pipeline



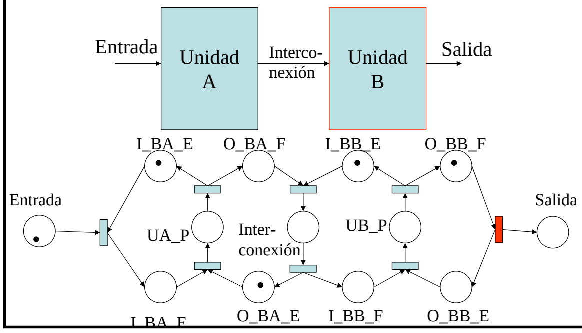
Pipeline



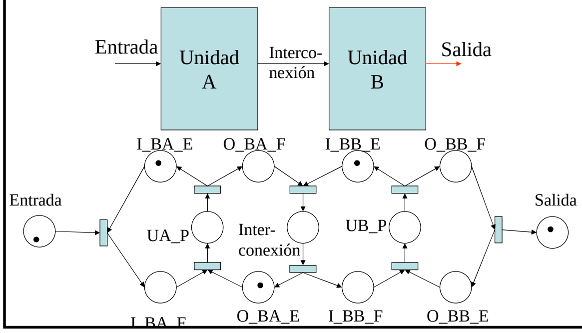
Pipeline



Pipeline

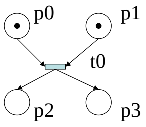


Pipeline



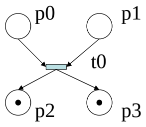
Comunicación

Síncrona

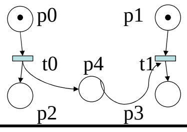


Comunicación

Síncrona

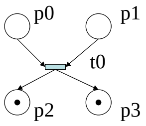


Asíncrona

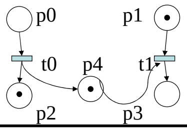


Comunicación

Síncrona

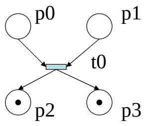


Asíncrona

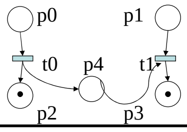


Comunicación

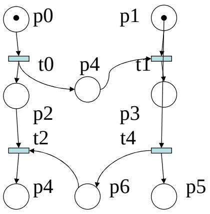
Síncrona



Asíncrona

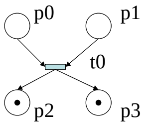


Síncrona (send/ack)

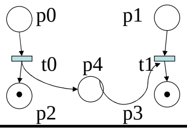


Comunicación

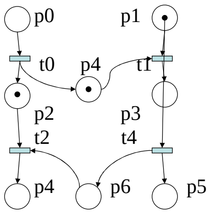
Síncrona



Asíncrona

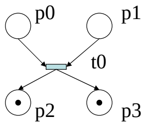


Síncrona (send/ack)

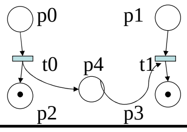


Comunicación

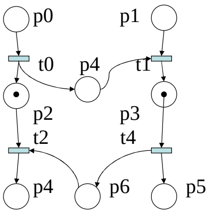
Síncrona



Asíncrona

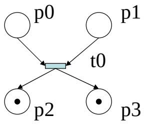


Síncrona (send/ack)

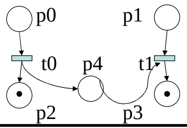


Comunicación

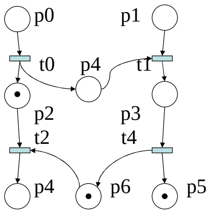
Síncrona



Asíncrona

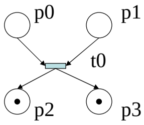


Síncrona (send/ack)

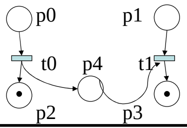


Comunicación

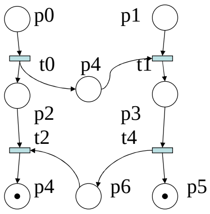
Síncrona



Asíncrona

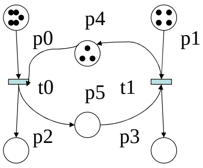


Síncrona (send/ack)



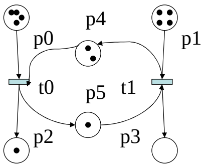
Comunicación

Buffer Limitado



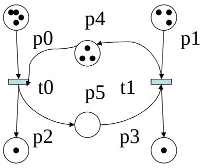
Comunicación

Buffer Limitado



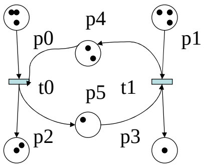
Comunicación

Buffer Limitado



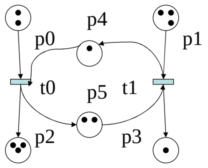
Comunicación

Buffer Limitado



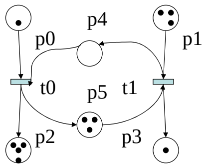
Comunicación

Buffer Limitado



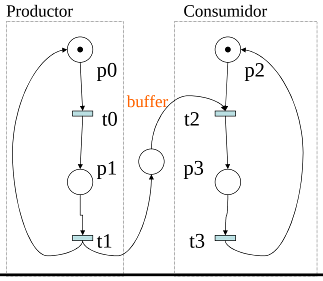
Comunicación

Buffer Limitado



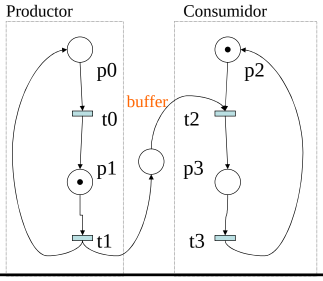
Productor/Consumidor

Buffer Ilimitado



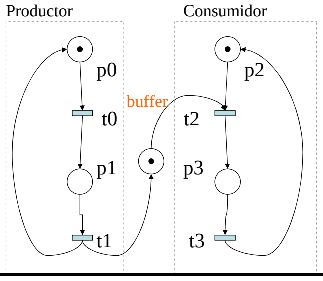
Productor/Consumidor

Buffer Ilimitado



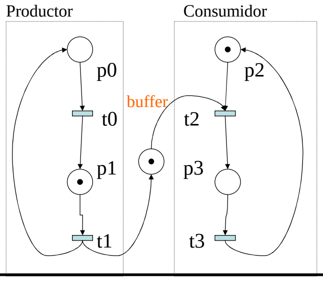
Productor/Consumidor

Buffer Ilimitado



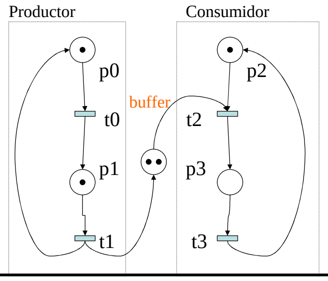
Productor/Consumidor

Buffer Ilimitado



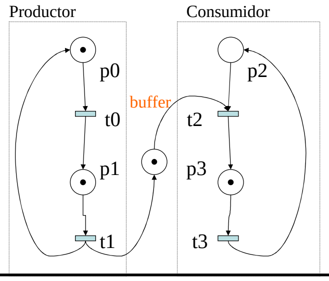
Productor/Consumidor

Buffer Ilimitado



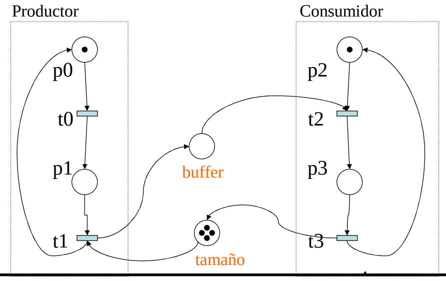
Productor/Consumidor

Buffer Ilimitado



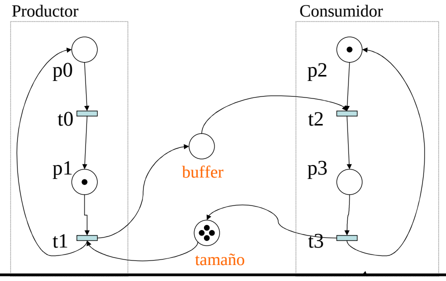
Productor/Consumidor

Buffer Limitado



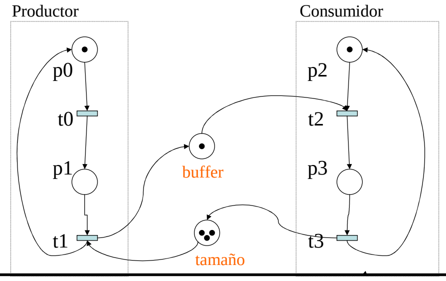
Productor/Consumidor

Buffer Limitado



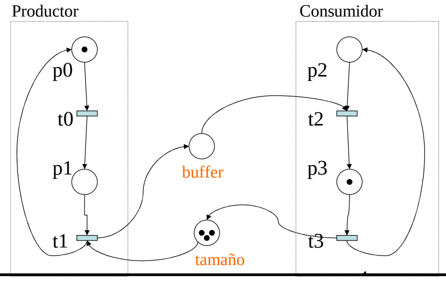
Productor/Consumidor

Buffer Limitado



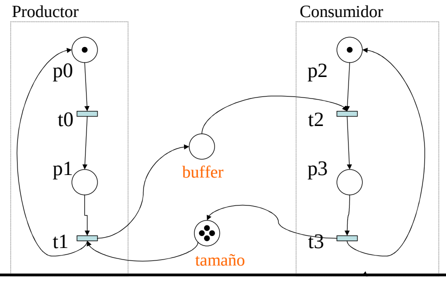
Productor/Consumidor

Buffer Limitado



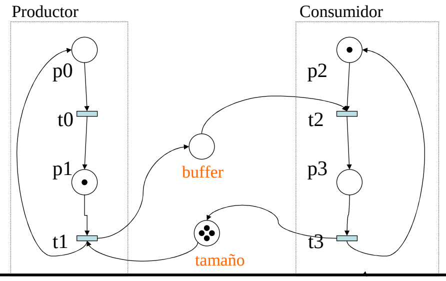
Productor/Consumidor

Buffer Limitado



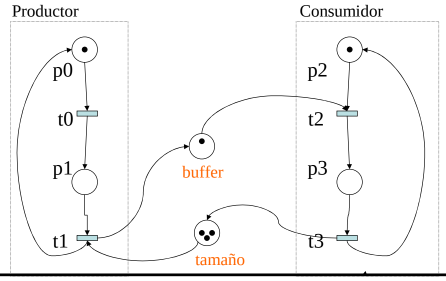
Productor/Consumidor

Buffer Limitado



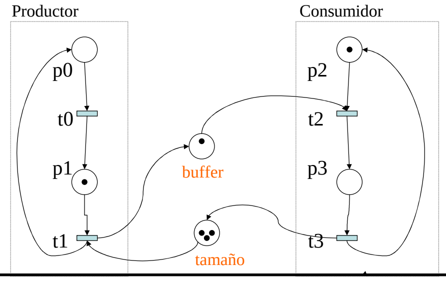
Productor/Consumidor

Buffer Limitado



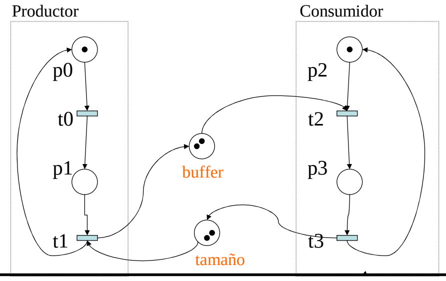
Productor/Consumidor

Buffer Limitado



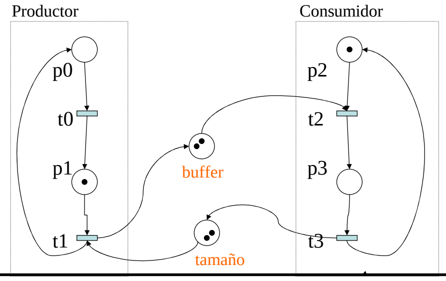
Productor/Consumidor

Buffer Limitado



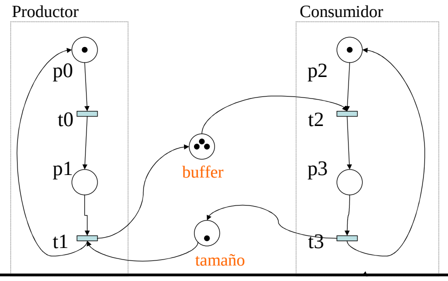
Productor/Consumidor

Buffer Limitado



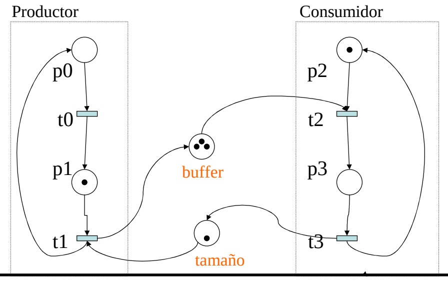
Productor/Consumidor

Buffer Limitado



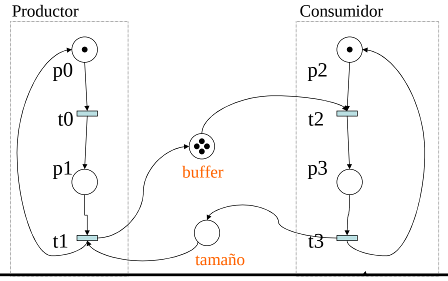
Productor/Consumidor

Buffer Limitado



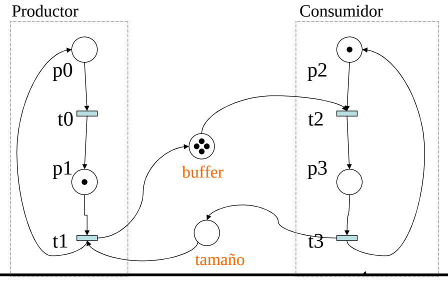
Productor/Consumidor

Buffer Limitado

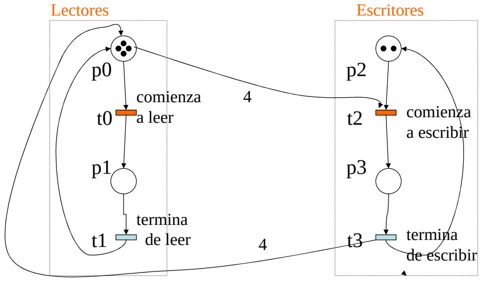


Productor/Consumidor

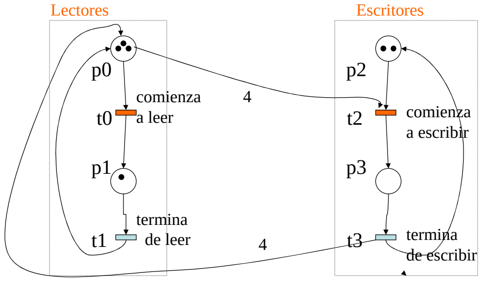
Buffer Limitado



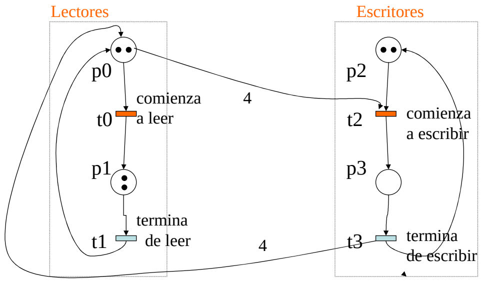
Lectores/Escritores



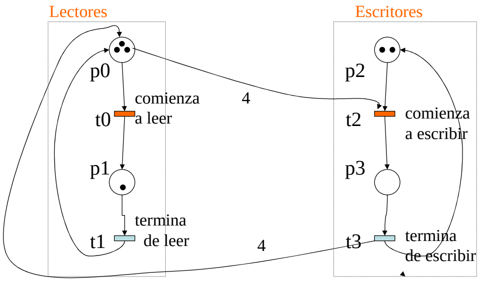
Lectores/Escritores



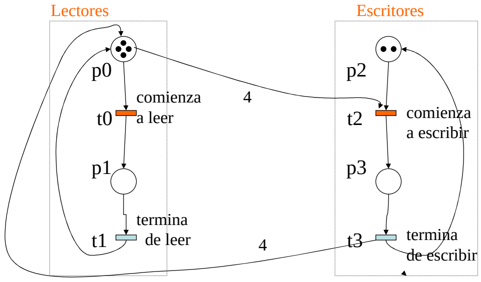
Lectores/Escritores



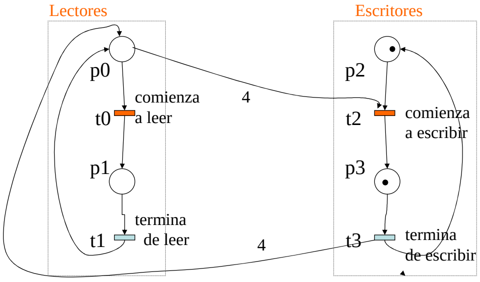
Lectores/Escritores



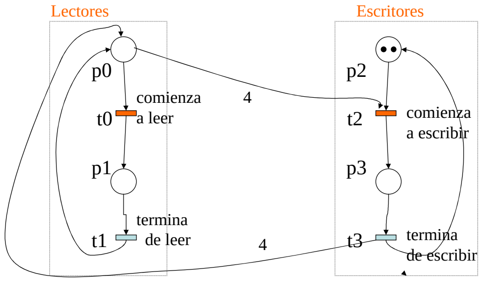
Lectores/Escritores



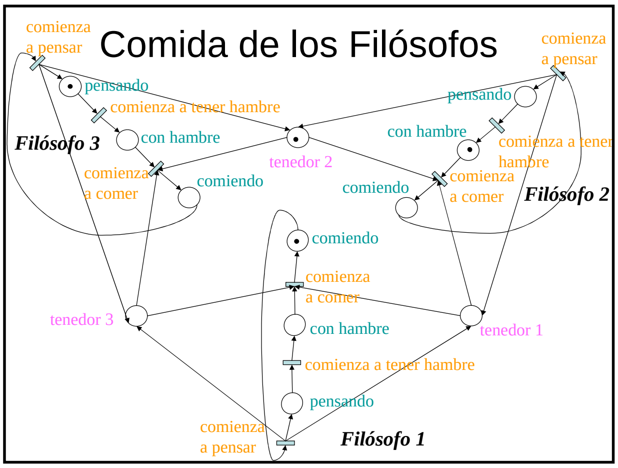
Lectores/Escritores

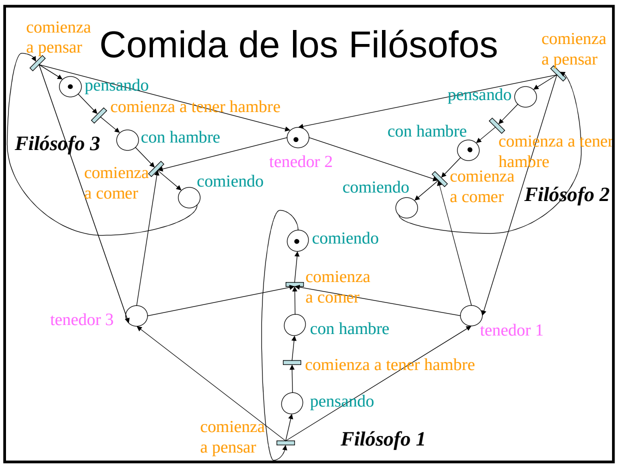


Lectores/Escritores

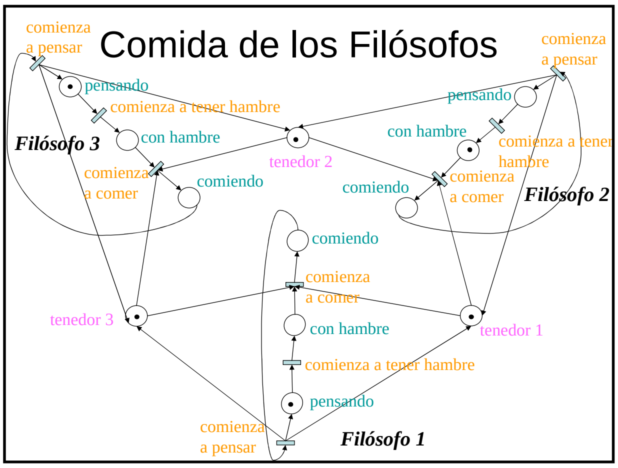


Comida de los Filósofos

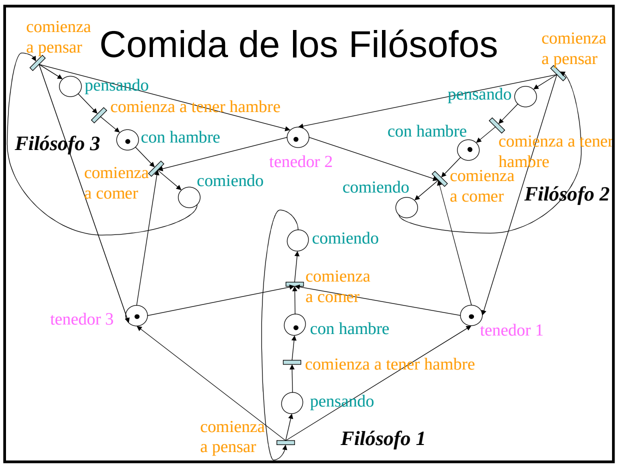




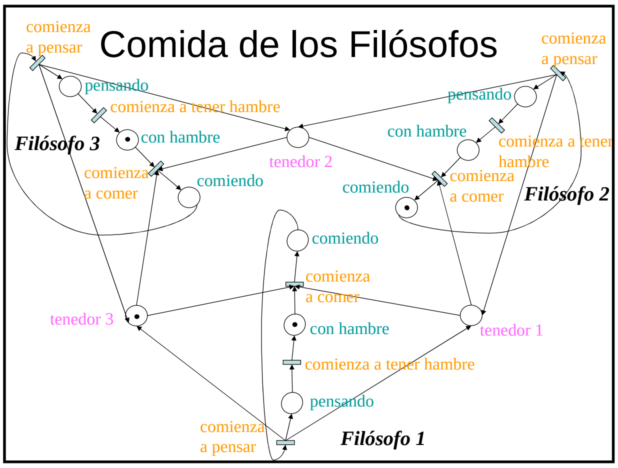
Comida de los Filósofos



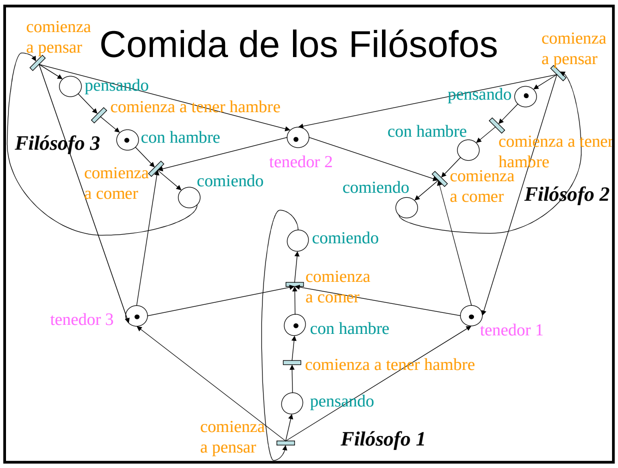
Comida de los Filósofos



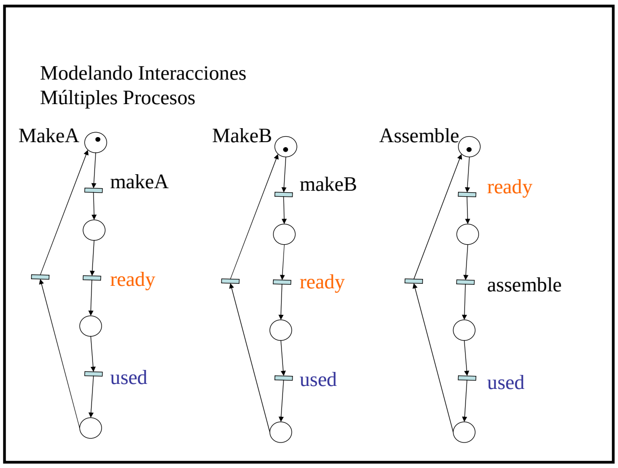
Comida de los Filósofos



Comida de los Filósofos

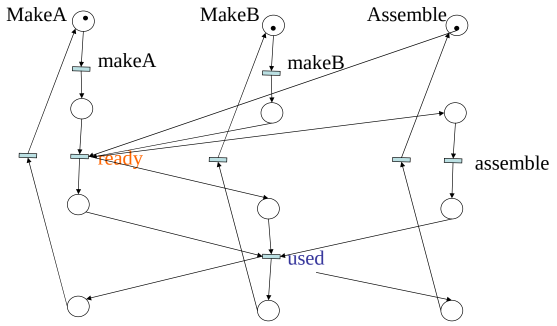


Comida de los Filósofos

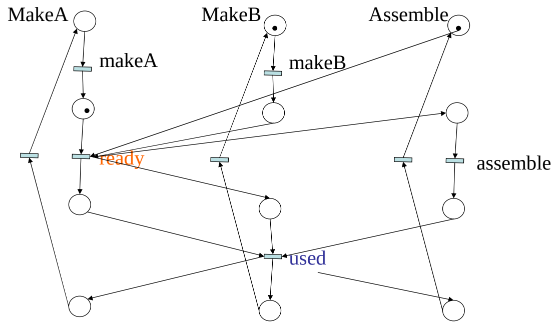


Modelando Interacciones
Múltiples Procesos

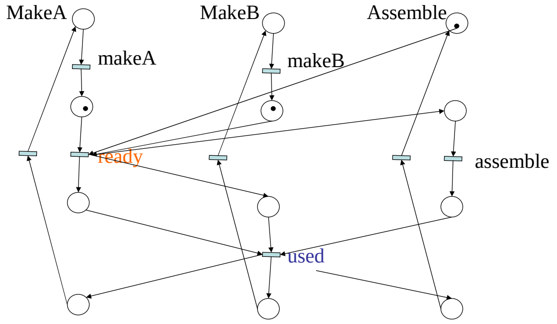
Modelando Interacciones
Múltiples Procesos



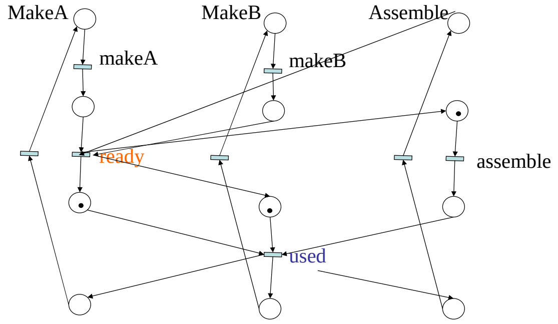
Modelando Interacciones
Múltiples Procesos



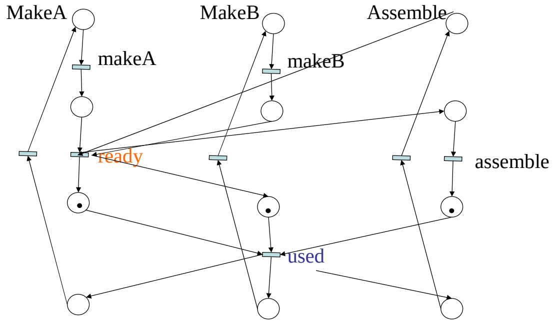
Modelando Interacciones
Múltiples Procesos



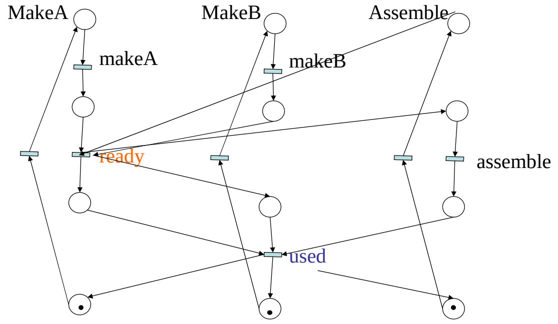
Modelando Interacciones
Múltiples Procesos



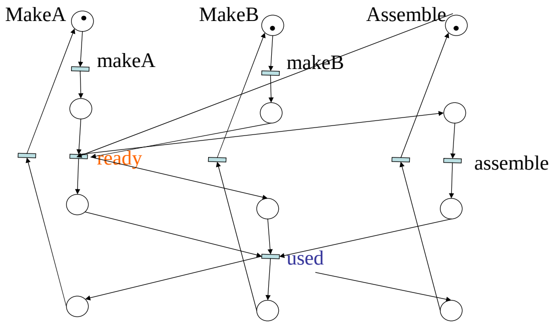
Modelando Interacciones
Múltiples Procesos



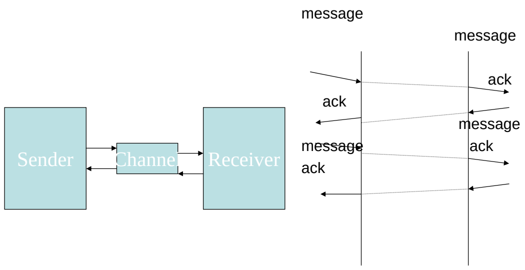
Modelando Interacciones
Múltiples Procesos



Modelando Interacciones
Múltiples Procesos



Flujo de Control
de un Protocolo Simple



Protocolo 1
Simplex sin restricciones

```
void sender1(void)
{
frame s;
packet buffer;
while (true) {
   from_network_layer(&buffer);
   s.info = buffer;
   to_physical_layer(&s);
}
}
```

```
void receiver1(void)
{
frame r;
event_type event;
while(true) {
   wait_for_event(&event);
   from_physical_layer(&r);
   to_network_layer(&r.info);
}
}
```

Protocolo 2
Stop and Wait

```
void sender1(void)
{
frame s;
packet buffer;
event_type event;
while (true) {
   from_network_layer(&buffer);
   s.info = buffer;
   to_physical_layer(&s);
   wait_for_event(&event);
}
}
```

```
void receiver1(void)
{
frame r;
event_type event;
while(true) {
   wait_for_event(&event);
   from_physical_layer(&r);
   to_network_layer(&r.info);
   to_physical_layer(&s);
}
}
```

Protocolo 3
(Retransmisión y Canal no confiable)

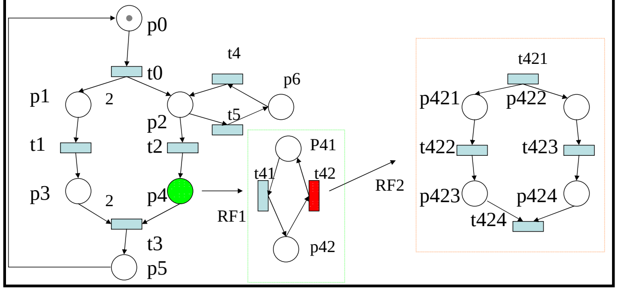
```
void sender1(void)
{seq_nr next;_frame_to_send;
frame s; packet buffer;
event_type event;
next_frame_to_send=0;
from_network_layer(&buffer);
while (true) {
   s.info=buffer;
   s.seq= next_frame_to_send;
   to_physical_layer(&s);
   start_timer(s.seq);
   wait_for_event(&event);
   if(event==frame_arrival) {
      from_network_layer(&buffer);
      if(s.ack==next_frame_to_send){
         from_network_layer(&buffer);
         inc(next_frame_to_send);
}}}}
```

```
void receiver1(void)
{
frame r,s; seq_nr next;
frame_expected;
event_type event;
while(true) {
   wait_for_event(&event);
   if(event==frame_arrival) {
      from_physical_layer(&r);
      if(r.seq==frame_expected){
         to_network_layer(&r.info);
         inc(frame_expected);
      }
      s.ack=1-frame_expected;
      to_physical_layer(&s);
   }
 }
}
```

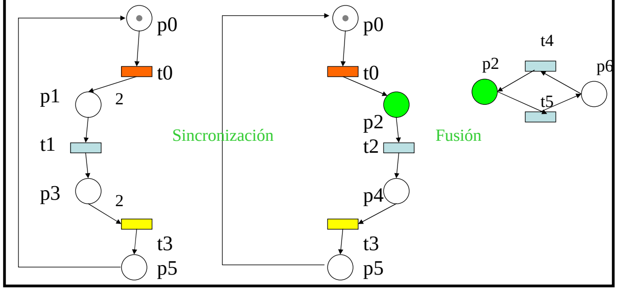
Modelado
- Principios -

- Top-down
  - Refinamiento
- Botton-up
  - Composición
- Híbrida
  - Refinamiento y Composición

- Top-down

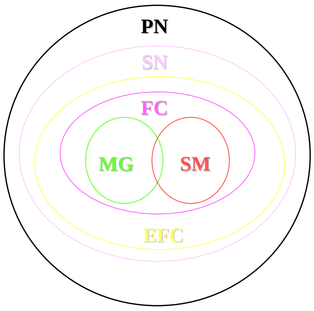


- Botton-up



- Más detalles cuando se presenten las propiedades!
  - Liveness, boundness, safeness, reversibilidad...

Sub-Clases



PN	Petri Net
SN	Simple Net
EFC	Extended Free Choice
FC	Free Choice
MG	Marked Graph
SM	State Machine

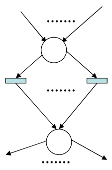
Sub-Clases

- Potencia de Modelado × Potencia de Decisión

- Complexidad × Decidibilidad

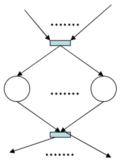
Sub-Clases

- Máquina de Estado (SM)
  - Definición: Sea una red R=(P,T,I,O). R es una SM iif $|I(t_j)|=|O(t_j)|=1,\ \forall\, t_i \in P$.



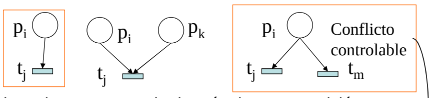
Sub-Clases

- Grafo Marcado (MG)
  - Definición: Sea una red R=(P,T,I,O). R es un MG iif $|I(p_i)|=|O(p_i)|=1, \forall\, p_i \in P$.



Sub-Clases

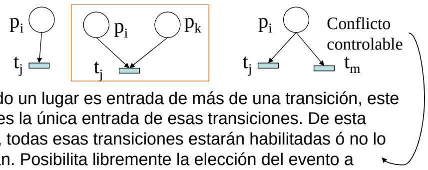
- Libre Elección (FC)
  - Definición: Sea una red R=(P,T,I,O). R es un FC iif $I(t_j)=\{p_j\}$ ó $O(p_i)=\{t_j\}$, $\forall\, t_j \in T$ y $p_i \in P$.



  - Cuando un lugar es entrada de más de una transición, este lugar es la única entrada de esas transiciones. De esta forma, todas esas transiciones estarán habilitadas ó no lo estarán. Posibilita libremente la elección del evento a realizar.

Sub-Clases

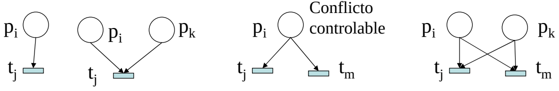
- Libre Elección (FC)
  - Definición: Sea una red R=(P,T,I,O). R es un FC iif $I(t_j)=\{p_j\}$ ó $O(p_i)=\{t_j\}$, $\forall\, t_j \in T$ y $p_i \in P$.



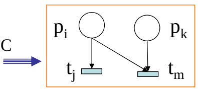
  - Cuando un lugar es entrada de más de una transición, este lugar es la única entrada de esas transiciones. De esta forma, todas esas transiciones estarán habilitadas ó no lo estarán. Posibilita libremente la elección del evento a realizar.

Sub-Clases

- Libre Elección Extendida (EFC)
  - Definición: Sea una red R=(P,T,I,O). R es un EFC iif $O(p_i)\cap O(p_k)\neq 0 \Rightarrow O(p_i) = O(p_k)\ \forall\ (p_i,p_k) \in P^2$

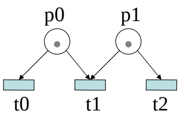


*Redes con esta estructura no son EFC
- Solución del conflicto no es libre



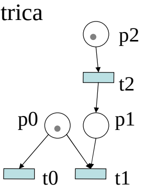
Confusión

Simétrica



t0 y t2 son concurrentes, pero están en conflicto con t1. El disparo de t1 imposibilita el disparo de t0 y t2.

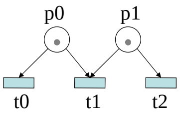
Asimétrica

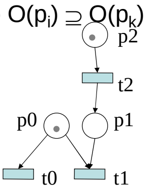


t0 y t2 son concurrentes, pero si t2 dispara primero t0 y t1 estarán en conflicto efectivo.

Sub-Clases

- Redes Simples (*Simple Nets*) (SN)
  - Definición: Sea una red R=(P,T,I,O). R es un SN iif $O(p_i)\cap O(p_k)\neq 0 \Rightarrow O(p_i) \subseteq O(p_k)$ ó $O(p_i) \supseteq O(p_k)\ \forall\ (p_i,p_k) \in P^2$





SN

Propiedades

- Verificación
- Prueba
- Análisis
- Validación

Propiedades

- **Verificación** - está basada en algorítmos determinísticos para responder si un modelo posee o no una determiminada propiedad.
  - *one sided* - respuestas: si o no
  - más genérico - respuestas: si o no (mayor complejidad)
- **Prueba** - está basada en algorítmos no-determinísticos que proporcionan argumentos formales para la afirmación o no de la existencia de una propiedad en un modelo

Propiedades

- **Análisis** - está basada en algorítmos que no tienen como objetivo la verificación de una determinada propiedad. Al contrario, son algorítmos más genéricos que proporcionan informaciones sobre diversas propiedades y sus resultados puede ser utlizados como base para algorítmos de verificación.
  - Da lo mismo que la respuesta sea sí o no, no hay prioridad de un sí sobre un no
  - También son usadas para responder cuestiones de tipo: ¿cuales son los conjuntos de lugares cuyo sumatorio de marcas permanece constante?

Propiedades

- **Validación** - es el proceso de obtención de confiabilidad de que el sistema funciona como era deseado.
  - El comportamiento del sistema es comparado con la expectativa de la persona que está validando el sistema.
  - Es un proceso inherentemente informal.
  - En principio es un proceso realizado sobre el sistema ya implantado. Sin embarbo, puede también ser realizado sobre un modelo (simulación).
  - Verificación o análisis no garantizan que el sistema funciona como se desea. De hecho, obtienen las propiedades de los modelos.

Propiedades de Comportamiento

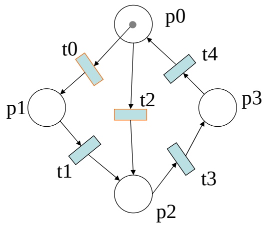
- Alcanzabilidad (*Reachability*)

  Indica la posibilidad de alcanzar un determinado marcado por el disparo de un número finito de transiciones, a partir de un marcado inicial.
- Marcado Alcanzable: sea $M_i[t_j>M_k$ y $M_k[t_h>M_l$ entonces $M_i[t_j\, t_h>M_l$. Por recurrencia designamos el disparo de una secuencia $s \in T^*$ por $M[s>M'$. Decimos que M' es alcanzable desde M. El conjunto de todos los posibles marcados alcanzables a partir de M_0 en la red $N=(R, M_0)$ se denota por:

  $A(R; M_0)=\{M' \in \aleph^m | M_0[s>M'\}$ (RS). $m = |P|$

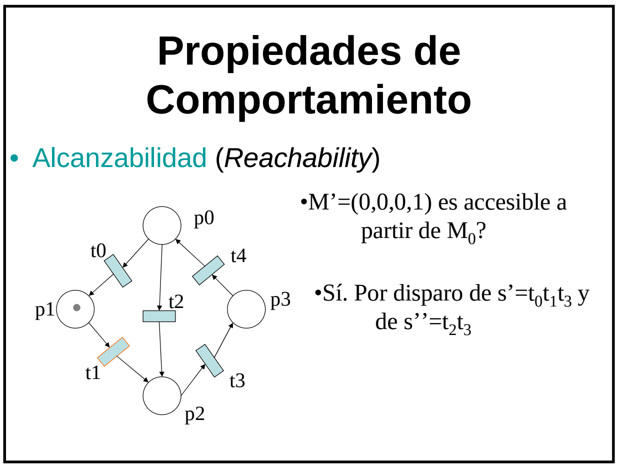
Propiedades de Comportamiento

- Alcanzabilidad (*Reachability*)



•M'=(0,0,0,1) es accesible a partir de M_0?

•Sí. Por disparo de $s'=t_0t_1t_3$ y de $s''=t_2t_3$

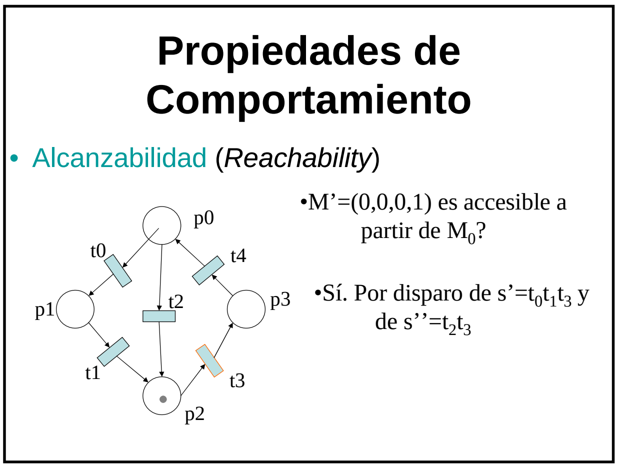


Propiedades de Comportamiento

- Alcanzabilidad (*Reachability*)

•M’=(0,0,0,1) es accesible a partir de M_0?

•Sí. Por disparo de s’=$t_0t_1t_3$ y de s’’=t_2t_3

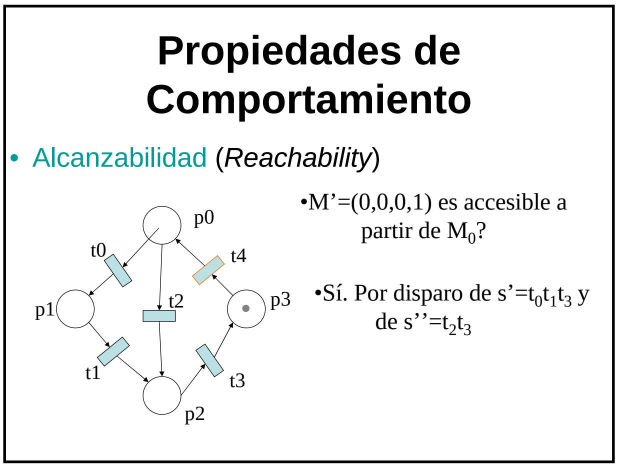


Propiedades de Comportamiento

- Alcanzabilidad (*Reachability*)

•M’=(0,0,0,1) es accesible a partir de M_0?

•Sí. Por disparo de s’=$t_0t_1t_3$ y de s’’=t_2t_3

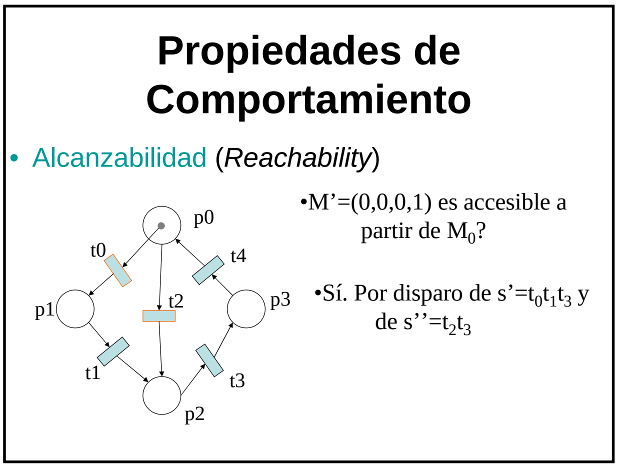


Propiedades de Comportamiento

- Alcanzabilidad (*Reachability*)

•M’=(0,0,0,1) es accesible a partir de M_0?

•Sí. Por disparo de s’=$t_0t_1t_3$ y de s’’=t_2t_3

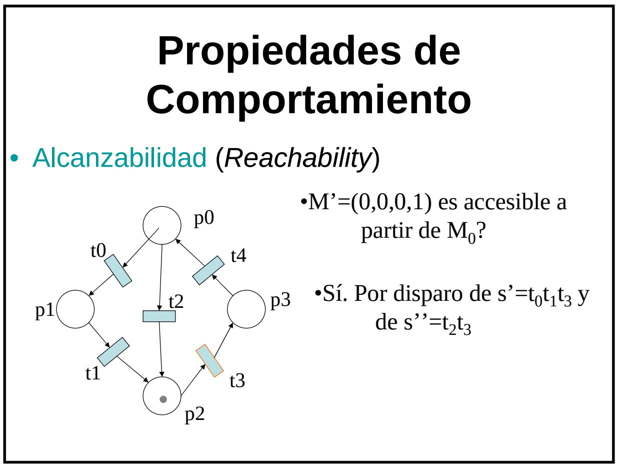


Propiedades de Comportamiento

- Alcanzabilidad (*Reachability*)

•M’=(0,0,0,1) es accesible a partir de M_0?

•Sí. Por disparo de s’=$t_0t_1t_3$ y de s’’=t_2t_3

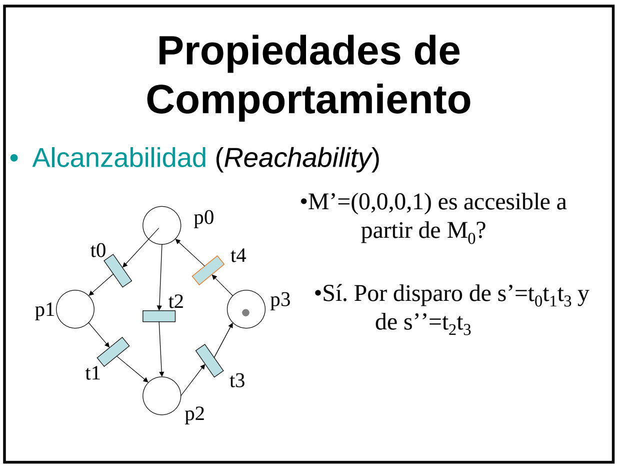


Propiedades de Comportamiento

- Alcanzabilidad (*Reachability*)

•M’=(0,0,0,1) es accesible a partir de M_0?

•Sí. Por disparo de s’=$t_0t_1t_3$ y de s’’=t_2t_3



Propiedades de Comportamiento

- Alcanzabilidad (*Reachability*)

•M’=(0,0,0,1) es accesible a partir de M_0?

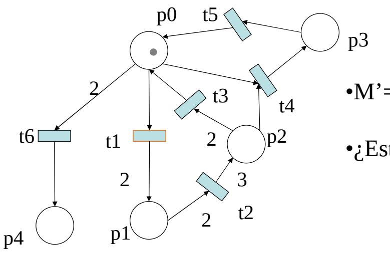
•Sí. Por disparo de s’=$t_0t_1t_3$ y de s’’=t_2t_3

Propiedades de Comportamiento

- Alcanzabilidad (*Reachability*)
  - Problemas asociados: alcanzabilidad de sub-marcados y verificación de *deadlock*

Propiedades de Comportamiento

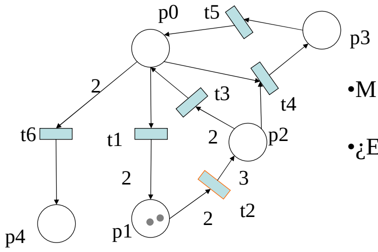
- Alcanzabilidad (*Reachability*)



- M’=(0,0,0,0,1) es un *deadlock*.
- ¿Este marcado es alcanzable?

Propiedades de Comportamiento

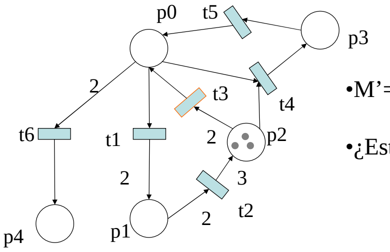
- Alcanzabilidad (*Reachability*)



- M’=(0,0,0,0,1) es un *deadlock*.
- ¿Este marcado es alcanzable?

Propiedades de Comportamiento

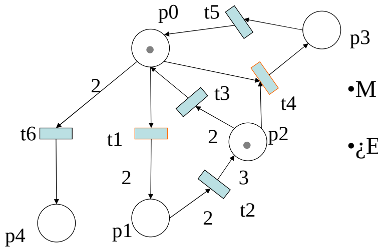
- Alcanzabilidad (*Reachability*)



- M’=(0,0,0,0,1) es un *deadlock*.
- ¿Este marcado es alcanzable?

Propiedades de Comportamiento

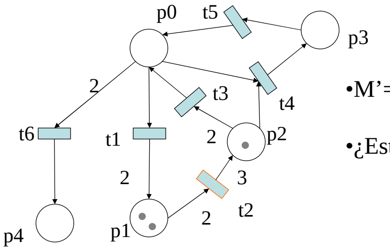
- Alcanzabilidad (*Reachability*)



- M’=(0,0,0,0,1) es un *deadlock*.
- ¿Este marcado es alcanzable?

Propiedades de Comportamiento

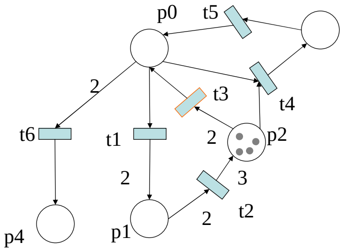
- Alcanzabilidad (*Reachability*)



- M’=(0,0,0,0,1) es un *deadlock*.
- ¿Este marcado es alcanzable?

Propiedades de Comportamiento

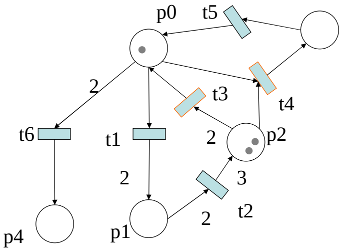
- Alcanzabilidad (*Reachability*)



- M'=(0,0,0,0,1) es un *deadlock*.
- ¿Este marcado es alcanzable?

Propiedades de Comportamiento

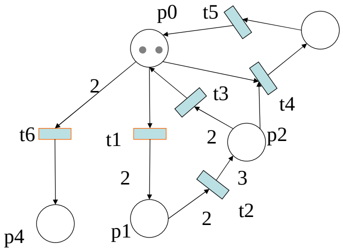
- Alcanzabilidad (*Reachability*)



- M'=(0,0,0,0,1) es un *deadlock*.
- ¿Este marcado es alcanzable?

Propiedades de Comportamiento

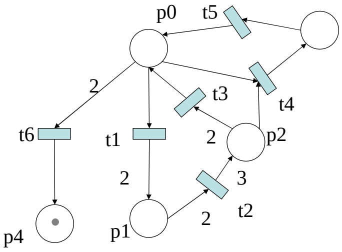
- Alcanzabilidad (*Reachability*)



- M'=(0,0,0,0,1) es un *deadlock*.
- ¿Este marcado es alcanzable?

Propiedades de Comportamiento

- Alcanzabilidad (*Reachability*)



- M'=(0,0,0,0,1) es un *deadlock*.
- ¿Este marcado es alcanzable?

Respuesta: Sí

Propiedades de Comportamiento

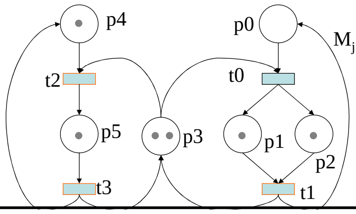
- Limitación (*Boundedness*)

  Un lugar se dice limitado si el número de marcas que este lugar puede almacenar es finito.

- Limitación : sea un lugar $p_i \in P$ de una red marcada N1=(R, M_0). Este lugar se dice k-limitado (*k-bounded*) o simplemente limitado si para todo marcado accesible $M \in A(R; M_0)$, $M(p_i) \leq k$, donde $k \in \aleph$.

Propiedades de Comportamiento

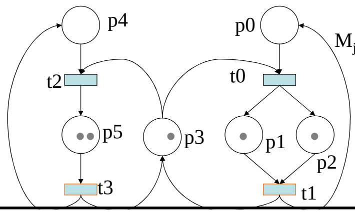
- Red Limitada : Decimos que una red N1=(R, M_0) es limitada (*bounded*) si $k(p_i) < \infty$, $\forall p_i \in P$.



$$\begin{array}{cccccccc} & & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \\ M_j & = (& 0, & 1, & 1, & 2, & 1, & 1) \end{array}$$

Propiedades de Comportamiento

- Red Limitada : Decimos que una red N1=(R, M_0) es limitada (*bounded*) si $k(p_i) < \infty$, $\forall\ p_i \in P$.

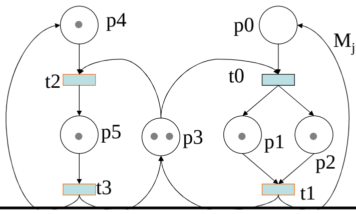


$p_0\ p_1\ p_2\ p_3\ p_4\ p_5$

$M_j = (0, 1, 1, 1, 0, 2)$

Propiedades de Comportamiento

- Red Limitada : Decimos que una red N1=(R, M_0) es limitada (*bounded*) si $k(p_i) < \infty$, $\forall\ p_i \in P$.

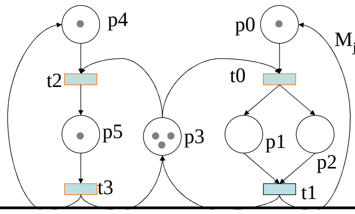


$p_0\ p_1\ p_2\ p_3\ p_4\ p_5$

$M_j = (0, 1, 1, 2, 1, 1)$

Propiedades de Comportamiento

- Red Limitada : Decimos que una red N1=(R, M_0) es limitada (*bounded*) si $k(p_i) < \infty$, $\forall\ p_i \in P$.

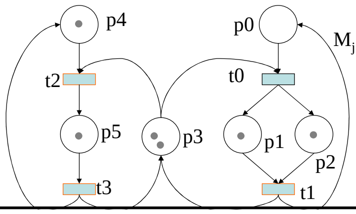


$p_0\ p_1\ p_2\ p_3\ p_4\ p_5$

$M_j = (1, 0, 0, 3, 1, 1)$

Propiedades de Comportamiento

- Red Limitada : Decimos que una red N1=(R, M_0) es limitada (*bounded*) si $k(p_i) < \infty$, $\forall\ p_i \in P$.



$p_0\ p_1\ p_2\ p_3\ p_4\ p_5$

$M_j = (1, 0, 0, 3, 1, 1)$

- p_4 es 1-limitado
- p_3 es 3-limitado

- Red limitada

Propiedades de Comportamiento

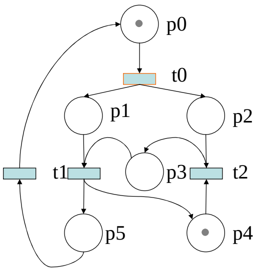
- Seguridad (binaria) (*Safeness*)

  Es una particularización del concepto de *Boundedness*.

- Lugar Seguro: sea un lugar $p_i \in P$ de una red marcada N1=(R, M_0). p_i es seguro (*safe*) si $M(p_i) \leq 1$, $\forall\ M \in A(R; M_0)$.
- Red Segura: una red marcada N1=(R, M_0) es definida como segura si $M(p_i) \leq 1$, $\forall\ M \in A(R; M_0)$, $\forall\ p_i \in P$.

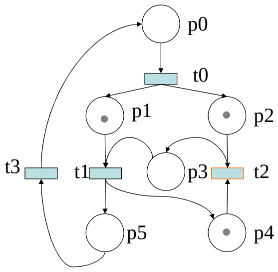
Propiedades de Comportamiento

- Seguridad (*Safeness*)



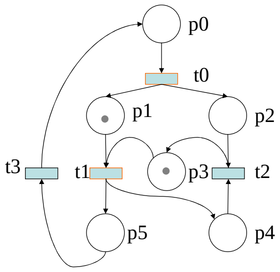
Propiedades de Comportamiento

- Seguridad (*Safeness*)



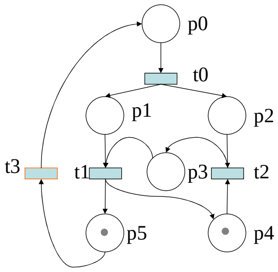
Propiedades de Comportamiento

- Seguridad (*Safeness*)



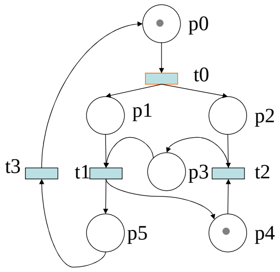
Propiedades de Comportamiento

- Seguridad (*Safeness*)



Propiedades de Comportamiento

- Seguridad (*Safeness*)



- Red safe

Propiedades de Comportamiento

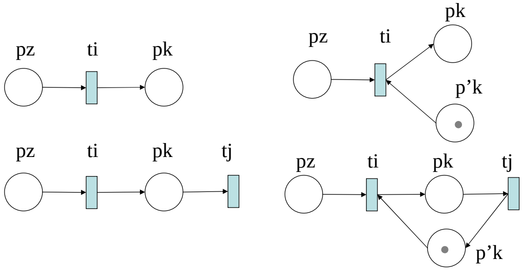
- Seguridad (*Safeness*)

Transformando una red no-segura en segura

  - Sea $p_k \in O(t_i)$ y $p_k \notin I(t_i)$, entonces se crea un lugar $p'_k \in I(t_i)$ y $M(p'_k)$=1
  - Sea $p_k \in I(t_j)$, entonces $p'_k \in O(t_j)$

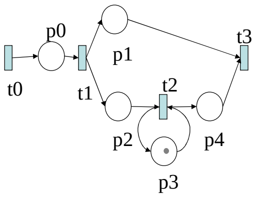
Propiedades de Comportamiento

- Seguridad (*Safeness*)
  - Transformando una red no-segura en segura

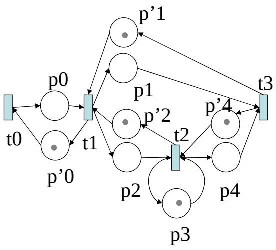


Propiedades de Comportamiento

- Seguridad (*Safeness*)
  - Transformando una red no-segura en una segura



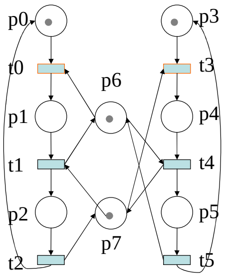
Red no-segura



Red segura

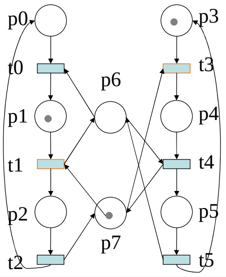
Propiedades de Comportamiento

- *Deadlock* - Indica la imposibilidad de disparo de cualquier transición de la red.



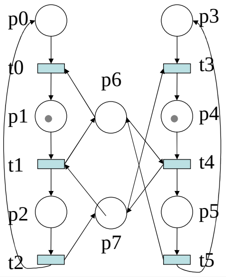
Propiedades de Comportamiento

- *Deadlock* - Indica la imposibilidad de disparo de cualquier transición de la red.



Propiedades de Comportamiento

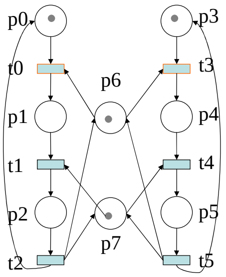
- *Deadlock* - Indica la imposibilidad de disparo de cualquier transición de la red.



Deadlock

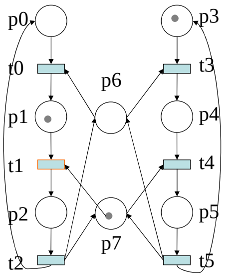
Propiedades de Comportamiento

- *Deadlock* - Indica la imposibilidad de disparo de cualquier transición de la red.



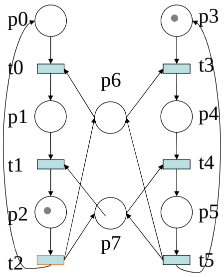
Propiedades de Comportamiento

- *Deadlock* - Indica la imposibilidad de disparo de cualquier transición de la red.



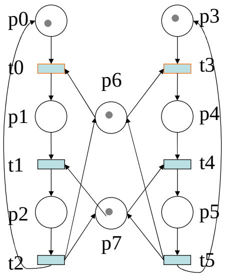
Propiedades de Comportamiento

- *Deadlock* - Indica la imposibilidad de disparo de cualquier transición de la red.



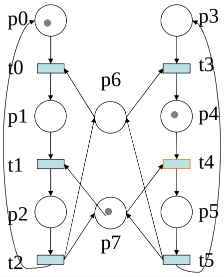
Propiedades de Comportamiento

- *Deadlock* - Indica la imposibilidad de disparo de cualquier transición de la red.



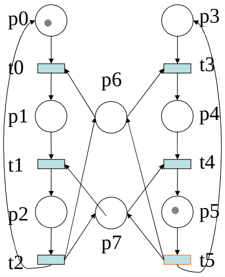
Propiedades de Comportamiento

- *Deadlock* - Indica la imposibilidad de disparo de cualquier transición de la red.



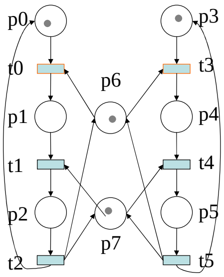
Propiedades de Comportamiento

- *Deadlock* - Indica la imposibilidad de disparo de cualquier transición de la red.



Propiedades de Comportamiento

- *Deadlock* - Indica la imposibilidad de disparo de cualquier transición de la red.



Sin *deadlock*

Propiedades de Comportamiento

Para que un sistema esté en *deadlock* es necesario que sean satisfechas estas tres (3) condiciones :

- **Exclusión Mútua** - un proceso obtiene un determinado recurso y él tiene aceso exclusivo al recurso.
- **Espera Circular** - esta situación ocurre cuando un processo **P1** posee un recurso **R1** y solicita un recurso **R2** y un proceso **P2** posee un recurso **R2** y solicita el recurso **R1.**

Ausencia de Desalojo - los recursos sólo pueden ser liberados por la acción explicita del proceso que tiene los recursos asociados. No hay otra entidad con autoridad para liberar el recurso.

Propiedades de Comportamiento

- Transición Potencialmente Disparable:

  llamamos una transición t_j potencialmente disparable en un marcado M_0 si ∃ M’ ∈ A(R; M_0) tal que M’[t_j>.

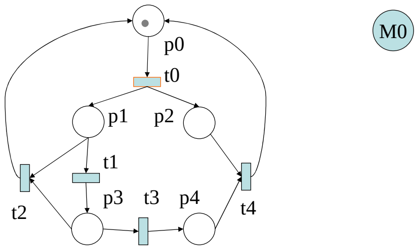
- Red Viva (*Live*): una red N=(R,M_0) se dice viva (*live*) si ∃ s ∈ L(N) tal que t_i ∈ s, ∀t_i ∈ T.

Otra definición

- Red Viva (*Live*): una red N=(R,M_0) se dice viva (*live*) si ∃ s ∈ T* tal que t_i ∈ s, M’[s>, ∀M’ ∈ A(R, M_0), ∀t_i ∈ T.

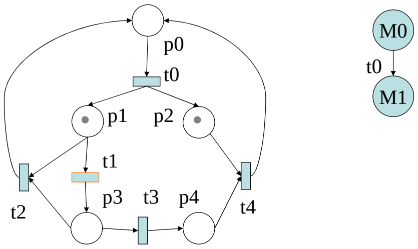
Propiedades de Comportamiento

- *Liveness* es más fuerte que *deadlock freedom*



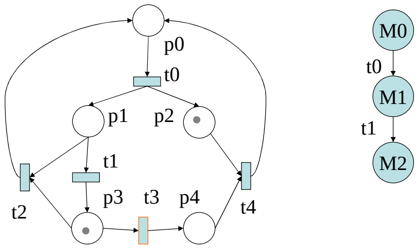
Propiedades de Comportamiento

- *Liveness* es más fuerte que *deadlock freedom*



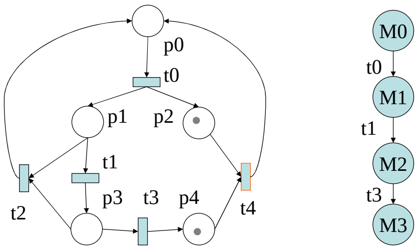
Propiedades de Comportamiento

- *Liveness* es más fuerte que *deadlock freedom*



Propiedades de Comportamiento

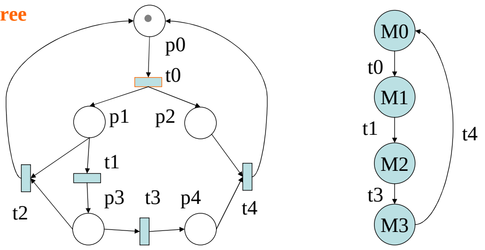
- *Liveness* es más fuerte que *deadlock freedom*



Propiedades de Comportamiento

- *Liveness* es más fuerte que *deadlock freedom*

•Deadlock free
•Non-live



Propiedades de Comportamiento

- *Liveness* es una propiedad "cara" de analizar.
- Una transición t_i puede clasificarse en niveles.
- Niveles de *liveness*:
  0 . Muerta (*dead*) o nivel N0, si $\exists$ s $\in$ L(R,M_0), tal que $t_i \in$ s, o sea, $\exists$ M' $\in$ A(R,M_0), tal que M'[t_i> .
  1 . N1-*live*, si t_i puede ser disparada por lo menos una vez en alguna secuencia s $\in$ L(R,M_0).
  2 . N2-*live*, si t_i puede ser disparada por lo menos *k* veces en alguna secuencia s $\in$ L(R,M_0).
  3 . N3-*live*, si t_i aparece un número infinito de veces en alguna secuencia s $\in$ L(R,M_0).
  4 . N4-*live*, o simplemente *live*, si t_i es N1-*live* $\forall$ M' $\in$ A(R,M_0),

Propiedades de Comportamiento

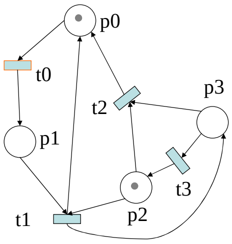
- Cobertura (*coverability*) de un marcado: sea el marcado M' en una red N=(R,M_0). M' se dice cubierto si existe M'' $\in$ A(R, M_0) tal que M''(p_i)≥M'(p_i) $\forall p_i \in$ P.

Propiedades de Comportamiento

- Reversibilidad: inicialmente una red se dice reversible si para cada marcado M_i del conjunto de marcados accesibles desde el marcado inicial puede ser nuevamente alcanzado.
- *Home-State*: sea un marcado $M_k \in$ A(R,M_0). M_k es denominado *home-state* si M_i [>M_k, $\forall M_i \in$ A(R,M_0).
- Reversibilidad: una red N=(R,M_0) es reversible si $\exists$ M_k , tal que M_i[>M_k , $\forall M_i \in$ A(R,M_0). (relajación de la definición descrita arriba)

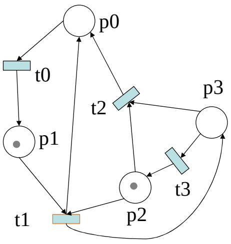
Propiedades de Comportamiento

- Reversibilidad



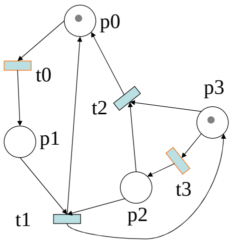
Propiedades de Comportamiento

- Reversibilidad



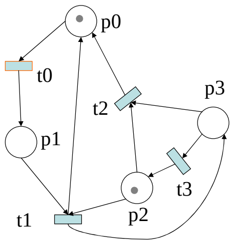
Propiedades de Comportamiento

- Reversibilidad



Propiedades de Comportamiento

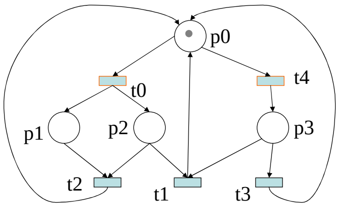
- Reversibilidad



Reversible

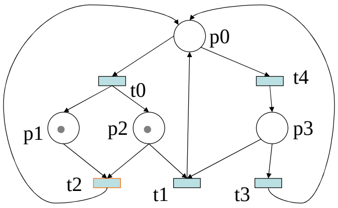
Propiedades de Comportamiento

- Reversibilidad



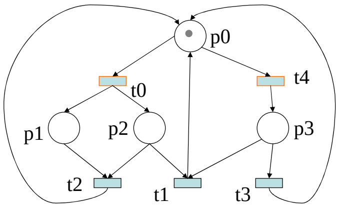
Propiedades de Comportamiento

- Reversibilidad



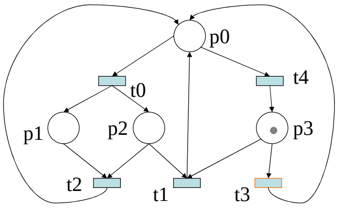
Propiedades de Comportamiento

- Reversibilidad



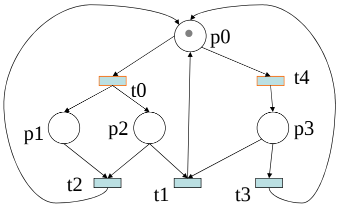
Propiedades de Comportamiento

- Reversibilidad



Propiedades de Comportamiento

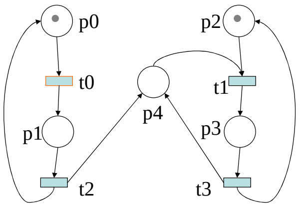
- Reversibilidad



Reversible

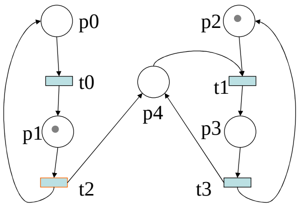
Propiedades de Comportamiento

- Reversibilidad



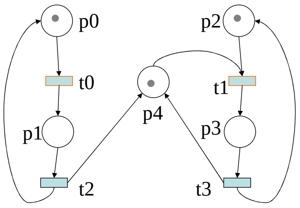
Propiedades de Comportamiento

- Reversibilidad



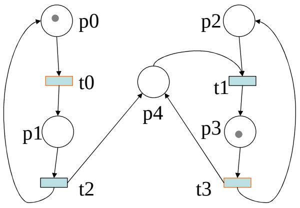
Propiedades de Comportamiento

- Reversibilidad



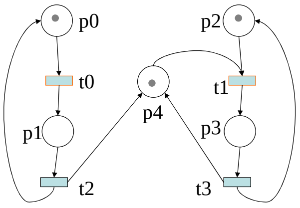
Propiedades de Comportamiento

- Reversibilidad



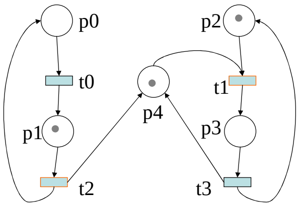
Propiedades de Comportamiento

- Reversibilidad



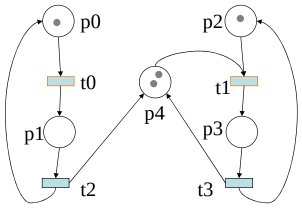
Propiedades de Comportamiento

- Reversibilidad



Propiedades de Comportamiento

- Reversibilidad



Irreversible

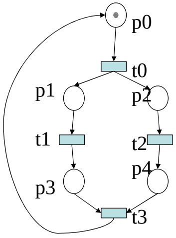
Propiedades de Comportamiento

- Persistencia: una red se dice persistente si para cualquier par de transiciones el disparo de una no deshabilita la otra.

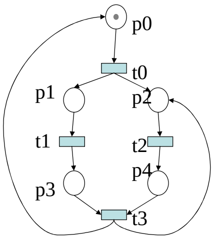
- Persistencia: sea una red $N=(R,M_0)$. N se dice persistente si para todo par $(t_i, t_j) \in T^2$ tal que $\exists\ M_k[t_i>$ e $M_k[t_j> \Rightarrow M_k[t_i>M''$, $M''[t_j>$ y vice-versa. Donde $M_k,M'' \in A(R,M_0)$.

Propiedades de Comportamiento

- Persistencia: todo grafo-marcado es persistente. No toda red persistente es un grafo-marcado.



Grafo-marcado



Persistentes

No es grafo-marcado

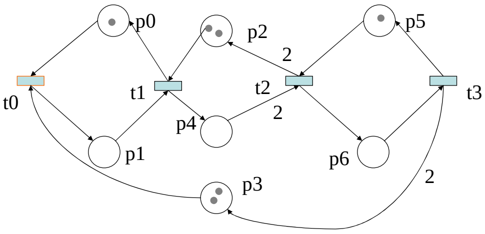
Propiedades de Comportamiento

- Justicia Limitada (imparcialidad) (*Bounded Fairness*): una red se dice *bounded fair* si para cualquier par de transiciones el número de disparos de una mientras la otra no se dispara está limitado.

- Justicia Limitada: sea una red $N=(R,M_0)$, $s \in L(R,M_0)$ una secuencia, un par $(t_i, t_j) \in T^2$ y $s(t_i)$ el número de disparos de t_i en **s**. Si $|\ s(t_i) - s(t_j)| \neq \infty$, $\forall\ (t_i, t_j) \in T^2$ N se dice *bounded fair* si todo par $(t_i, t_j) \in T^2$ es *B-fair*

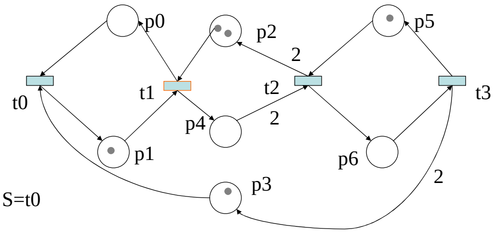
Propiedades de Comportamiento

- Justicia Limitada



Propiedades de Comportamiento

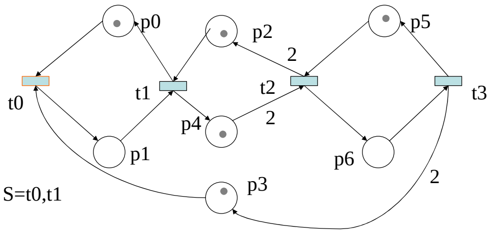
- Justicia Limitada



S=t0

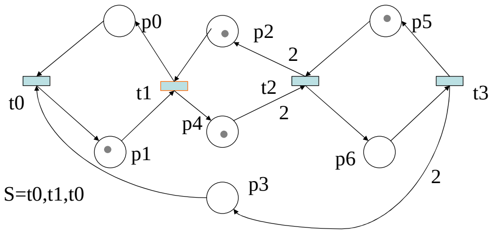
Propiedades de Comportamiento

- Justicia Limitada



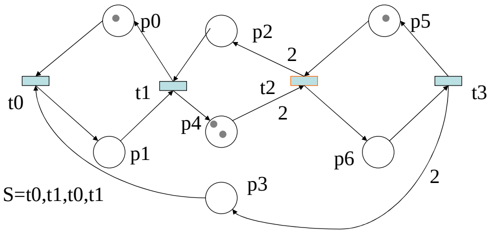
Propiedades de Comportamiento

- Justicia Limitada



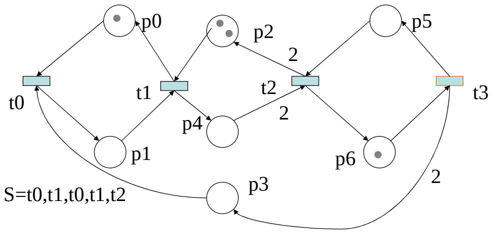
Propiedades de Comportamiento

- Justicia Limitada



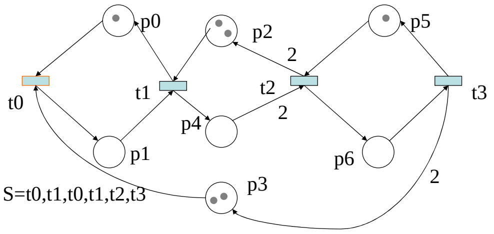
Propiedades de Comportamiento

- Justicia Limitada



Propiedades de Comportamiento

- Justicia Limitada



Propiedades de Comportamiento

- Distancia Sincrónica: relaciona el grado de dependencia mútua entre eventos.

- Distancia Sincrónica: sea una red $N=(R,M_0)$, $t_i, t_j \in T$. ~~$d(t_i, t_j)=\max$~~$_{s \in L(N)} \{|s(t_i) - s(t_j)|\}$ es definida como la distancia sincrónica entre las transiciones.
  - Si $d(t_i, t_j) \rightarrow \infty \Rightarrow$ el modelo es *unfair (parcial)*
  - Si $d(t_i, t_j) = 1 \Rightarrow$ a cada disparo de t_i, t_j dispara.

Propiedades de Comportamiento

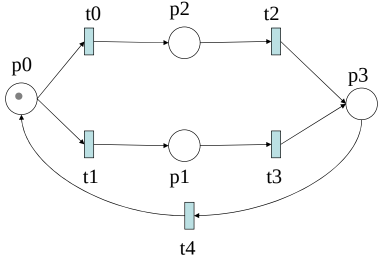
- Conservación: está relacionada con el sumatorio de marcas a medida que se disparan las transiciones.

- Red Extrictamente Conservativa: sea una red $N=(R,M_0)$ y $M \in A(R,M_0)$ un marcado alcanzable. N se dice extrictamente conservativa si $\sum M(p_i) = \sum M_0(p_i)$, $\forall p_i \in P$ y $\forall M \in A(R,M_0)$.

Propiedades de Comportamiento

- Red Extrictamente Conservativa

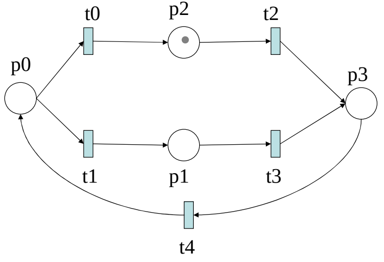
$\sum M(p_i) = 1, \forall p_i \in P$



Propiedades de Comportamiento

- Red Extrictamente Conservativa

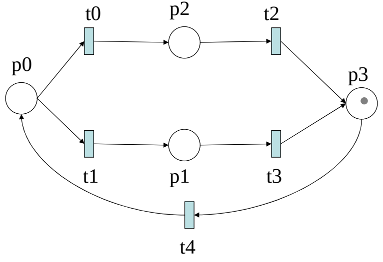
$\sum M(p_i) = 1, \forall p_i \in P$



Propiedades de Comportamiento

- Red Extrictamente Conservativa

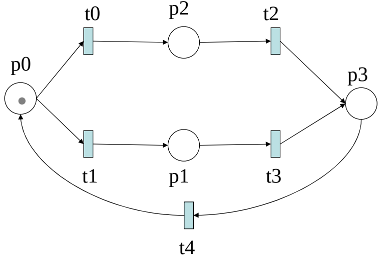
$\sum M(p_i) = 1, \forall p_i \in P$



Propiedades de Comportamiento

- Red Extrictamente Conservativa

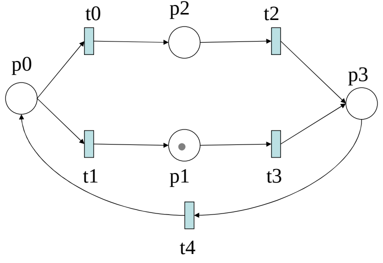
$\sum M(p_i) = 1, \forall p_i \in P$



Propiedades de Comportamiento

- Red Extrictamente Conservativa

$\sum M(p_i) = 1, \forall p_i \in P$



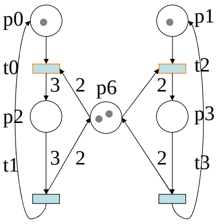
Propiedades de Comportamiento

- Conservación: está relacionada con el sumatorio de marcas a medida que se disparan las transiciones.
- Red Conservativa: sea una red N=(R,M_0), M∈ A(R,M_0) un marcado alcanzable y W=(w_1,...,w_n) (*vector de componentes no negativas*), donde n=#P. N se dice conservativa si $\sum_{pi \in P} w_i \times M(p_i) = \sum_{pi \in P} w_i \times M_0(p_i)$, ∀M∈ A(R,$M_0$).

Propiedades de Comportamiento

- Conservación

$\sum_{pi \in P} w_4^i \times \mathbf{m_0(p_i) = 17, \forall p_i \in P}$

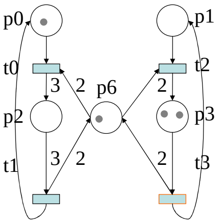


W_1 = (3,0,1,0,0)
W_2 = (0,2,0,1,0)
W_3 = (0,0,4,3,6)
W_4 = (3,2,5,4,6)

Propiedades de Comportamiento

- Conservación

$\sum_{pi \in P} w_4^i \times \mathbf{m_0(p_i) = 17, \forall p_i \in P}$

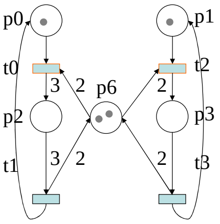


W_1 = (3,0,1,0,0)
W_2 = (0,2,0,1,0)
W_3 = (0,0,4,3,6)
W_4 = (3,2,5,4,6)

Propiedades de Comportamiento

- Conservación

$\sum_{pi \in P} w_4^i \times \mathbf{m_0(p_i) = 17, \forall p_i \in P}$

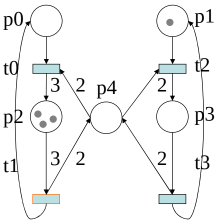


W_1 = (3,0,1,0,0)
W_2 = (0,2,0,1,0)
W_3 = (0,0,4,3,6)
W_4 = (3,2,5,4,6)

Propiedades de Comportamiento

- Conservación

$\sum_{pi \in P} w_4^i \times \mathbf{m_0(p_i) = 17, \forall p_i \in P}$

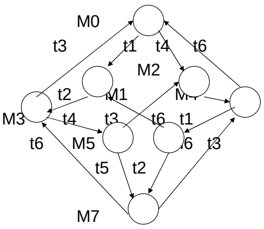


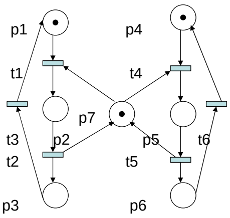
W_1 = (3,0,1,0,0)
W_2 = (0,2,0,1,0)
W_3 = (0,0,4,3,6)
W_4 = (3,2,5,4,6)

Análisis de Propiedades de Comportamiento

- Grafo de Alcanzabilidad: sea una red marcada N=(R,M_0). RG(R, M_0)=(RS,ARCS) define el grafo de alcanzabilidad (*Reachability Graph*), donde RS:P→ℵ es el conjunto de vértices y representa el conjunto de alcançabilidad. ARCS ⊆ RS × T × RS es una relación representando los arcos.

Grafo de Marcados Accesibles (Alcanzables)

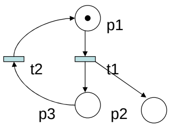




$A(N,M_0)=\{M_0,M_1,M_2,M_3,M_4,M_5,M_6,M_7\}$
A=RS - *reachability set*

Grafo de Marcados Accesibles (Alcanzables)

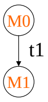
- RG Infinito

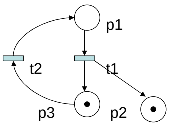


$A(N,M_0)=\{M_0,M_1,M_2,...\}$
A=RS - *reachability set*

Grafo de Marcados Accesibles (Alcanzables)

- RG Infinito

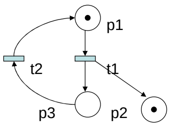




$A(N,M_0)=\{M_0,M_1,M_2,...\}$
A=RS - *reachability set*

Grafo de Marcados Accesibles (Alcanzables)

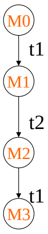
- RG Infinito

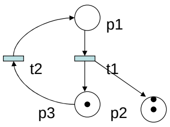


$A(N,M_0)=\{M_0,M_1,M_2,...\}$
A=RS - *reachability set*

Grafo de Marcados Accesibles (Alcanzables)

- RG Infinito





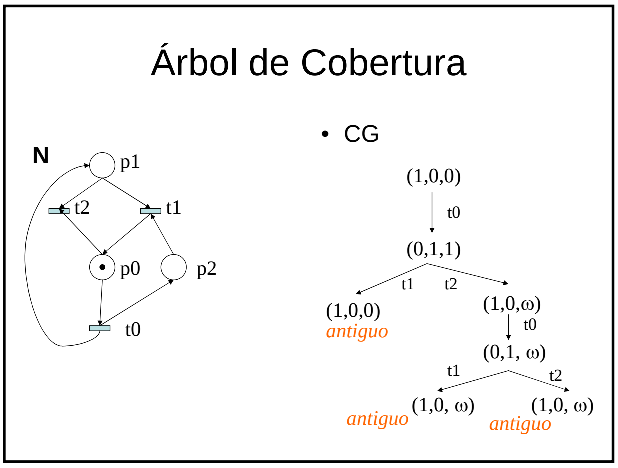
$A(N,M_0)=\{M_0,M_1,M_2,...\}$
A=RS - *reachability set*

Árbol de Cobertura

- Grafo de Cobertura: sea una red marcada $N=(R,M_0)$. $CG(R, M_0)=(CS,ARCS)$ define el grafo de cobertura (*Coverability Graph*), donde $CS:P\rightarrow\aleph \cup \{\omega\}$ es el conjunto de vértices y representa el conjunto de cobertura. $ARCS \subseteq RS \times T \times RS$ es una relación representando los arcos.

Árbol de Cobertura

- Rotule el marcado inicial M_0 como raiz y discrimínelo como *nuevo*
- Mientras haya marcados *nuevos*, haga:
  - ■Seleccione un marcado M.
    - Si M es idéntico a un marcado en el camino desde la raiz hasta M, entonces rotulelo como *antiguo* y seleccione un *nuevo* marcado.
  - ■Si ninguna transición está habilitada para M, rotule este marcado como *final*
  - ■Mientras haya transiciones habilitadas para M, haga lo siguiente para cada transición habilitada:
- Obtenga un nuevo marcado M'que resulta del disparo de una transicoçpm **t** habilitada para M.
- Si en el camino desde la raiz hasta el marcado M existe un marcado M'' tal que para todo lugar **p** M'(p)≥M''(p) y M'≠M'' entonces substituyase M'(p) por ω para cada **p** donde M'(p)>M''(p).
- Introduza **M'** como nodo y dree un arco rotulado como **t** de **M** a **M'** y rotule M'como *nuevo.*



Árbol de Cobertura

N

- CG

(1,0,0)

↓ t0

(0,1,1)

t1: (1,0,0) *antiguo*

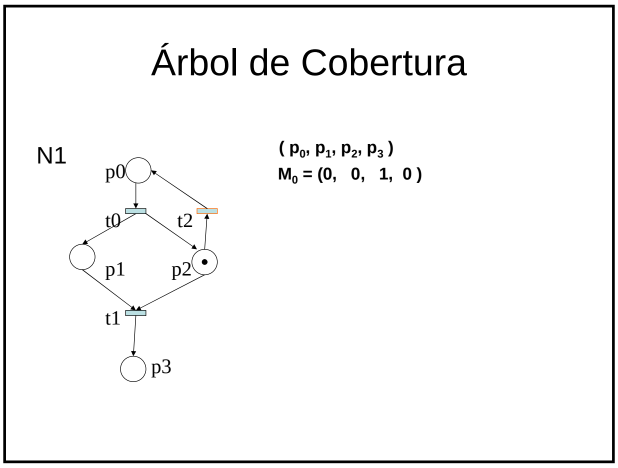
t2: (1,0,ω)

↓ t0

(0,1, ω)

t1: (1,0, ω) *antiguo*

t2: (1,0, ω) *antiguo*

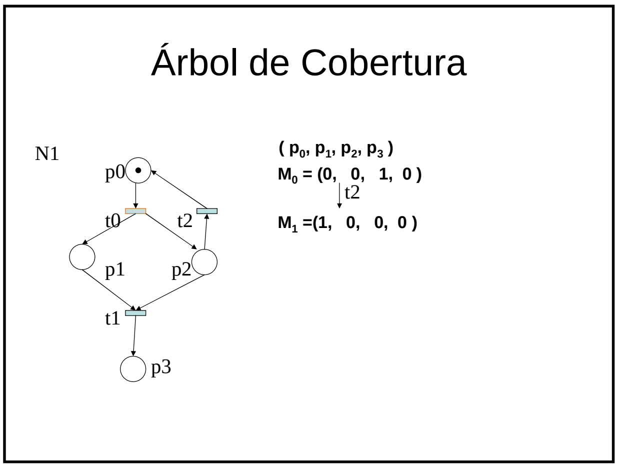


Árbol de Cobertura

N1

(p_0, p_1, p_2, p_3)

M_0 = (0, 0, 1, 0)



Árbol de Cobertura

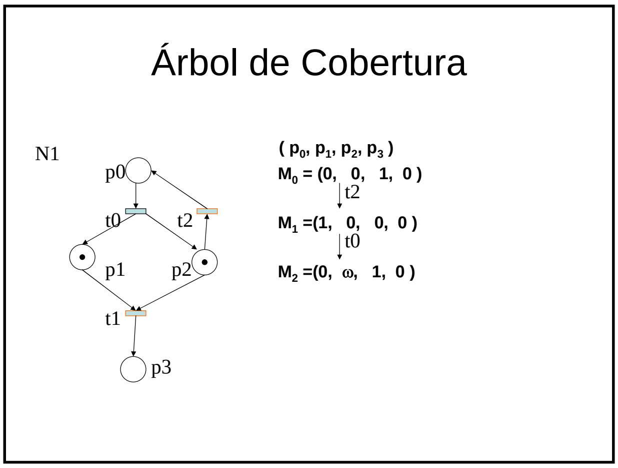
N1

(p_0, p_1, p_2, p_3)

M_0 = (0, 0, 1, 0)

↓ t2

M_1 =(1, 0, 0, 0)



Árbol de Cobertura

N1

(p_0, p_1, p_2, p_3)

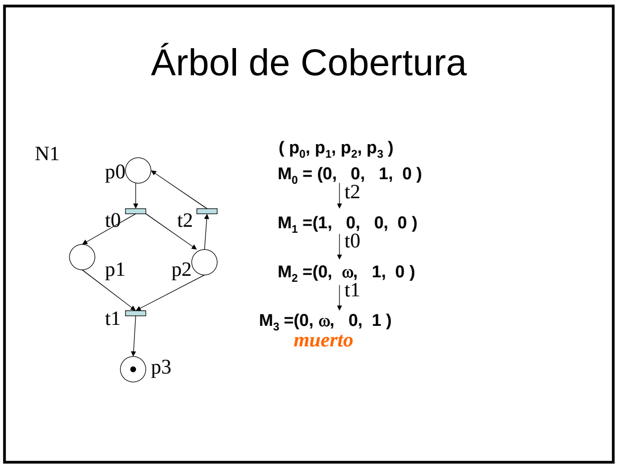
M_0 = (0, 0, 1, 0)

↓ t2

M_1 =(1, 0, 0, 0)

↓ t0

M_2 =(0, ω, 1, 0)



Árbol de Cobertura

N1

(p_0, p_1, p_2, p_3)

M_0 = (0, 0, 1, 0)

↓ t2

M_1 =(1, 0, 0, 0)

↓ t0

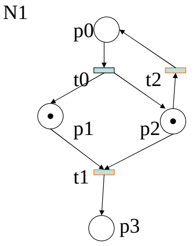
M_2 =(0, ω, 1, 0)

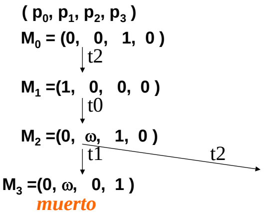
↓ t1

M_3 =(0, ω, 0, 1)

muerto

Árbol de Cobertura





(p_0, p_1, p_2, p_3)

M_0 = (0, 0, 1, 0)

t2

M_1 =(1, 0, 0, 0)

t0

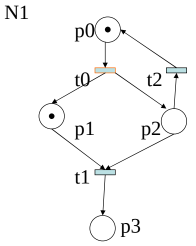
M_2 =(0, ω, 1, 0)

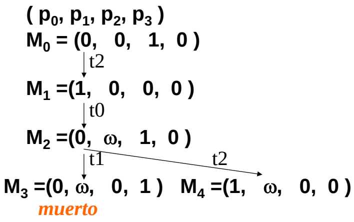
t1 t2

M_3 =(0, ω, 0, 1)

muerto

Árbol de Cobertura





(p_0, p_1, p_2, p_3)

M_0 = (0, 0, 1, 0)

t2

M_1 =(1, 0, 0, 0)

t0

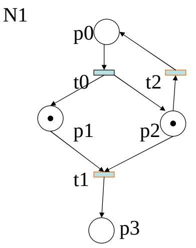
M_2 =(0, ω, 1, 0)

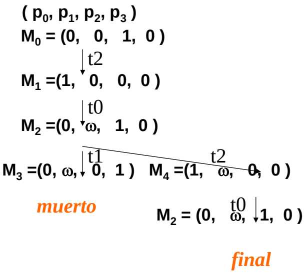
t1 t2

M_3 =(0, ω, 0, 1) M_4 =(1, ω, 0, 0)

muerto

Árbol de Cobertura





(p_0, p_1, p_2, p_3)

M_0 = (0, 0, 1, 0)

t2

M_1 =(1, 0, 0, 0)

t0

M_2 =(0, ω, 1, 0)

t1 t2

M_3 =(0, ω, 0, 1) M_4 =(1, ω, 0, 0)

muerto

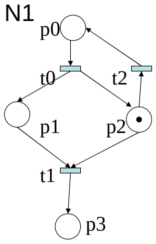
t0

M_2 = (0, ω, 1, 0)

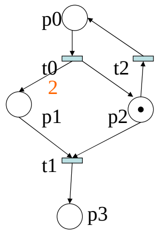
final

Árbol de Cobertura

- N1



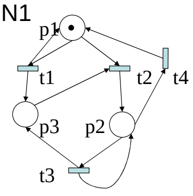
- N2



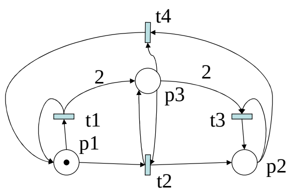
* ambas redes tienen el mismo árbol de cobertura

Árbol de Cobertura

- N1



- N2

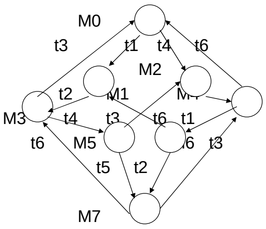


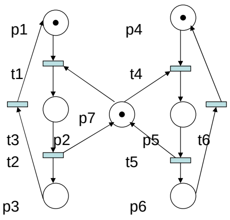
S= $t_1t_2t_3$ lleva a deadlock

* ambas redes tienen el mismo árbol de cobertura,
pero N1 es *live* y N2 no

Descripción Lineal
y
Objetos Estruturales

•Grafo de Marcados Accesibles (Alcanzables)





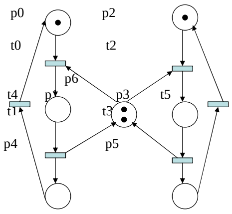
A(N,M_0)={M_0,M_1,M_2,M_3,M_4,M_5,M_6,M_7}
A=RS - *reachability set*

Redes de Petri

- Solución de la Ecuación de Estado

$M'(p_i)=M_0(p_i) + C.\bar{S}$, $\forall p_i \in P$

- $AL^{\aleph}(N,M_0)=LRS^{\aleph} = \{M \in \aleph^{|P|}$ | $\exists\, \bar{s} \in \aleph^{|T|}$ **donde** $M'(p_i)=M_0(p_i) + C.\bar{S}\}$
- Condición suficiente para no-alcanzabilidad (polinomial)
- $RS(N) \subseteq LRS^{\aleph}(N)$
- Condición necesaria para alcanzabilidad
- **NP-Completo para redes genéricas**



$M'=(0,0,0,1,1,0,1)$

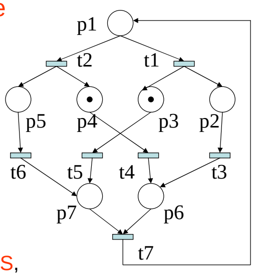
$\bar{s} = (s_0,s_0,1+s_3,s_3,s_0-1,s_3)$

Una solución:

$\bar{s} = (1,1,1,0,0,0)$

Redes de Petri

- Solución de la Ecuación de Estado
- $RS(N) \subseteq LRS^{\aleph}(N)$
- Condición suficiente para no-alcanzabilidad
- Condición necesaria para alcanzabilidad

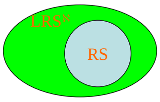


- para $M'=(1,0,0,0,1,0,0)$,

$\bar{s}=(1,1,0,2,2,0,2)$ es solución de ES, pero $M' \notin RS(N, M_0)$

Redes de Petri

- Solución de la Ecuación de Estado
- $RS(N) \subseteq LRS^{\aleph}(N)$
- Condición suficiente para no-alcanzabilidad
- Condición necesaria para alcanzabilidad

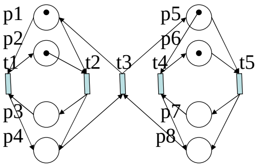


Redes de Petri

- Solución de la Ecuación de Estado

$M'(p_i)=M_0(p_i) + C.\bar{S}$, $\forall p_i \in P$

- $AL^{\Re}(N,M_0)=LRS^{\Re} = \{M \in \Re^{|P|}$ | $\exists\, \bar{s} \in \Re^{|T|}$ donde $M'(p_i)=M_0(p_i) + C.\bar{S}\}$
- $RS(N) \subseteq LRS^{\aleph}(N) \subseteq \overline{LRS}^{\Re}(N)$
- Condición suficiente para no-alcanzabilidad
- Condición necesaria para alcanzabilidad
- **Polinomial para redes genéricas (método de eliminación de Gauss)**



$M'=(1,0,1,0,1,1,0,0)$

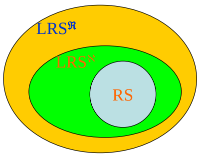
$M' \notin RS$, $M' \notin LRS^{\aleph}$, pero

$M' \in LRS^{\Re}$

$\bar{s} = (0,1,1,1/2,1/2)$

Redes de Petri

- Solución de la Ecuación de Estado
- $RS(N) \subseteq LRS^{\aleph}(N) \subseteq LRS^{\Re}(N)$
- Condición suficiente para no-alcanzabilidad
- Condición necesaria para alcanzabilidad



Redes de Petri

- Propiedades que se pueden analizar con la Ecuación de Estados
  - Condición necesaria para alcanzabilidad
  - Condición suficiente para no-alcanzabiliad
  - ¿El límite de p es igual a k? No existencia de M tal que M(p) > k (condición suficiente)
  - ¿Cual es el límite de p? (condición suficiente)
  - ¿Son un par de lugares $P'=(p_i,p_j) \subseteq P$ mutuamente exclusivos? No existencia de M tal que $M(p_i)+ M(p_j)>1$
  - ¿Deadlock freedom? No existencia de M donde ninguna transición esté habilitada (condición suficiente)

Redes de Petri

- ¿Es el límite de p igual a k? No existencia de M tal que M(p) > k (condición suficiente)

  $M'(pi)=M0(pi) +C.\overline{S}, \forall pi \in P$

  Si $\nexists M'(p)>k$, entonces $M'(p)=k$
- Ejemplo:

  Es el límite de $p_3 = 4$?

  Si no existe $M(p_3) = 5$ como solución de

  $M'(pi)=M0(pi) +C.\overline{S}, \forall pi \in P$, entonces el límite de p_3 es 4

Redes de Petri

- ¿Cual es el límite de p? (condición suficiente)

El límite de p es $b[p]=max\{M(p) \mid M \in RS(N)\}$

$$\begin{array}{l} \qquad\quad p_0 \qquad p_i \qquad p_m \\ \text{Sea } 1_{pi}=[0, ...,0,1,0,....,0] \end{array}$$

$sb[p]=max\{1_{pi}.M \mid M-C.\overline{S}=M_0 \wedge M, S\geq0\}$

Como la solución de $M(pi)=M_0(pi) +\overline{C}.S, \forall pi \in P$ puede generar soluciones espúreas M puede ser una de ellas, pero como $RS(N) \subseteq LRS^{\aleph}(N)$, entonces $sb[p] \geq b[p]$

Redes de Petri

- ¿Son un par de lugares $P'=(p_l,p_j)\subseteq P$ mútuamente exclusivos? No existencia de M tal que $M(p_i)+ M(p_i)>1$

Si $\nexists$ M tal que

$M(p_l)+ M(p_j)>1$

$\forall M \in LRS^{\aleph}=\{M \mid M(pi) = M_0(pi) + C.\underline{S}, \forall p_i \in P, M \geq 1_{pi,pj}$
$S\geq0\}$

Entonces p_l,p_j son mútamente exclusivos

Redes de Petri

- ¿Son un sub-conjunto de lugares $P' \subseteq P$ mútuamente exclusivos?

Si $\nexists M(pi)>1, \forall M \in LRS^{\aleph}=\{M \mid M(pi)=M_0(pi) +\overline{C}.S, M \geq 1_{pi} S\geq0, \forall p_i \in P\}$

O sea, si la red es *safe.*

Si $\nexists$ M tal que

$\sum M(p_l)>1, \forall p_l \in P'$

$\forall M \in LRS^{\aleph}=\{M \mid M(pi) = M_0(pi) + C.\overline{S}, \forall p_i \in P\}$

Entonces los lugares P' son mútuamente exclusivos

Redes de Petri

- ¿Deadlock freedom? No existencia de M donde ninguna transición esté habilitada (condición suficiente)

Si $\nexists$ M tal que $M=M_0 +\overline{C.S(t_j)}, \forall t_j \in T$, M, $S\geq0$

No hay un marcado obtenodo por el disparo de cualquier transición t_j. O sea, no hay *deadlock*.

Invariantes de Transición

Sea $M_0 [s> M$ y $M= M_0$

Entonces, de $M=M_0 +C.\overline{S} \Rightarrow M - M_0 = C.\overline{S}$, tenemos

$$C.\overline{S} = 0 \Rightarrow C. I_t = 0$$

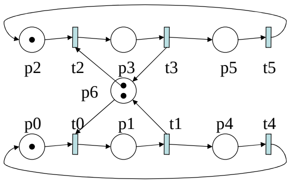
- T-*flow* (un vector): $I_t :T \rightarrow \mathfrak{I}$
  - T-semi*flow* (un vector): $I_t :T \rightarrow \aleph$
- Ley de repetición de transiciones (una ecuación)
- Componente repetitivo (una red)

Invariantes de Transición

M_0 [s> M   y   M= M_0

Entonces, de $M=M_0 + \overline{C}.S \Rightarrow M - M_0 = \overline{C}.S$, tenemos

$C.\overline{S} = 0 \Rightarrow C.\ I_t = 0$



I. s0 = s1 = s4
II. s2 = s3 = s5

Para s0 = 1 y s2= 0
- It1 = (1,1,0,0,1,0)

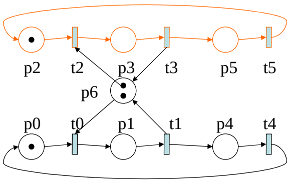
Para s0 = 0 y s2 =1
- It2=(0,0,1,1,0,1)
- It3 = It1 + It2 = (1,1,1,1,1,1)

Invariantes de Transición

M_0 [s> M   y M= M_0

Então, de $M=M_0 +\overline{C}.S \Rightarrow M - M_0 = \overline{C}.S$, temos

$C.\overline{S} = 0 \Rightarrow C.\ I_t = 0$



I. T-semiflow (vector)
II. Ley de repetición (ecuación)
III. Componente repetitivo
(una red)

•It1 = (1,1,0,0,1,0)

Invariantes de Transición

- T-*semiflow* (un vector)
- Ley de repetición de transiciones (una ecuación)
- Componente repetitivo (una red)
- T-*semiflow*: Sea un vector It ≥ 0, tal que $s_i \geq 0$.
  It se llama t-*semiflow* iif C.It = 0
- Soporte de un t-*semiflow*: Sea It un t-*semiflow*,
  ST es definido como soporte de t-*semiflow* ST={t | It(t)>0}
- Minimal T-semi*flow*: Un t-*semiflow* es mínimo iif su soporte no contiene ningún soporte de cualquier otro t-*semiflow*. ==> T-invariant

Invariantes de Lugar

- N se dice conservativa si $\sum_{pi \in P} w_i \times M(p_i) = cte$
- Dado que todo marcado debe satisfacer la ecuación de estado, podemos hacer: $M' = M_0 + \overline{C.S}$
- Por tanto, para cualquier marcado inicial M_0

$W^T.M' = W^T.M_0 = W^T.(M_0 + \overline{C.S})$

$W^T.M_0 = W^T.M_0 + W^T.\ \overline{C.S}$

$W^T.\ \overline{C.S} = 0$

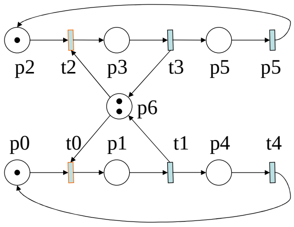
- Como $\overline{S} \neq 0 \Rightarrow W^T.\ C = 0$
- Invariante de Lugar - Ip . C = 0

Invariantes de Lugar

- P-*semiflow* (un vector)
- Marcado invariante o ley de conservación de marcas (una ecuación)
- Componente conservativo (una red)
- P-*semiflow*: Sea un vector Ip ≥ 0, tal que $\omega_i \geq$. Ip se llama p-*semiflow* iif Ip . C = 0
- Soporte de un p-*semiflow*: Sea Ip un p-*semiflow*, SP se define como soporte de p-*semiflow* SP={p | IP(p)>0}
- Minimal P-semi*flow*: Un p-*semiflow* es mínimo iif su soporte no contiene ningún soporte de cualquier otro p-*semiflow*. ==> P-invariant

Invariantes de Lugar

- P-*semiflow* (un vector)
- Marcado invariante o ley de conservación de marcas (una ecuación)
- Componente conservativo (una red)



Ip . C = 0

p0,p1,p2,p3,p4,p5,p6

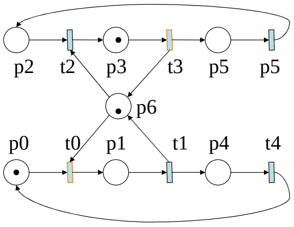
Ip1= |1, 1, 0, 0, 1, 0, 0|

Ip2= |0, 0, 1, 1, 0, 1, 0|

Ip3= |0, 1, 0, 1, 0, 0, 1|

Invariantes de Lugar

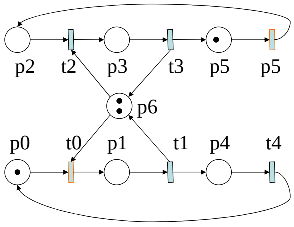
- P-*semiflow* (un vector)
- Marcado invariante o ley de conservación de marcas (una ecuación)
- Componente conservativo (una red)



Ip . C = 0
p0,p1,p2,p3,p4,p5,p6
Ip1= |1, 1, 0, 0, 1, 0, 0|
Ip2= |0, 0, 1, 1, 0, 1, 0|
Ip3= |0, 1, 0, 1, 0, 0, 1|

Invariantes de Lugar

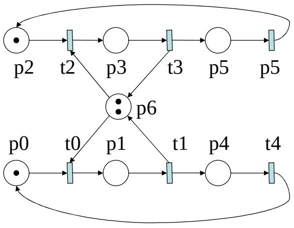
- P-*semiflow* (un vector)
- Marcado invariante o ley de conservación de marcas (una ecuación)
- Componente conservativo (una red)



Ip . C = 0
p0,p1,p2,p3,p4,p5,p6
Ip1= |1, 1, 0, 0, 1, 0, 0|
Ip2= |0, 0, 1, 1, 0, 1, 0|
Ip3= |0, 1, 0, 1, 0, 0, 1|

Invariantes de Lugar

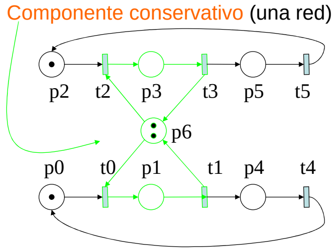
- P-*semiflow* (un vector)
- Marcado invariante o ley de conservación de marcas (una ecuación)
- Componente conservativo (una red)



Ip . C = 0
p0,p1,p2,p3,p4,p5,p6
Ip1= |1, 1, 0, 0, 1, 0, 0|
Ip2= |0, 0, 1, 1, 0, 1, 0|
Ip3= |0, 1, 0, 1, 0, 0, 1|

Invariantes de Lugar

- P-*semiflow* (un vector)
- Marcado invariante o ley de conservación de marcas (una ecuación)
- Componente conservativo (una red)



Ip . C = 0
p0,p1,p2,p3,p4,p5,p6
Ip1= |1, 1, 0, 0, 1, 0, 0|
Ip2= |0, 0, 1, 1, 0, 1, 0|
Ip3= |0, 1, 0, 1, 0, 0, 1|

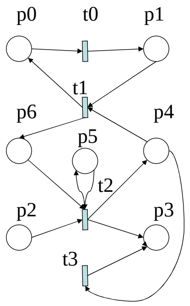
Invariantes de Lugar

Algoritmo para el cálculo de p-*semiflows* mínimos

- Input: matriz de incidencia C, donde m =|P | y n=|T |
- Ouput: conjunto de p-*semiflows*
  - A:=C , W:=I_n donde I_n indentidad de dimensión n
  - for i:=1 to m, hacer:
    - Sume en la matriz [A|W] todas las líneas que son combinación lineal de pares de lineas de [A|W] y anulan la i-^{ésima} columna de A
    - Elimine de [A|W] las líneas en que la columna i-^{ésima} no es nula.
  - Elimine las líneas de W en que los soportes no son mínimos y divida cada una por el MCD de los elementos no nulos. (todos los mínimos están aquí)

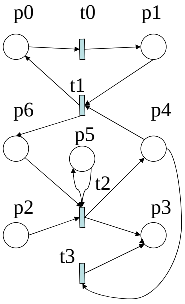
Invariantes de Lugar

$$\begin{array}{cccc|ccccccc|c}
0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6
\end{array}$$



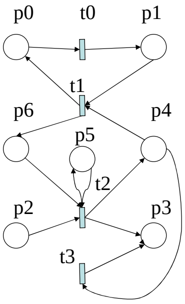
Invariantes de Lugar

0	1	2	3	0	1	2	3	4	5	6	
-1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	-1	1	0	0	1	0	0	0	0	2
0	0	1	-1	0	0	0	1	0	0	0	3
0	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	5
0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	6



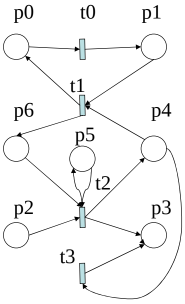
Invariantes de Lugar

0	1	2	3	0	1	2	3	4	5	6	
-1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	-1	1	0	0	1	0	0	0	0	2
0	0	1	-1	0	0	0	1	0	0	0	3
0	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	5
0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	6
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	



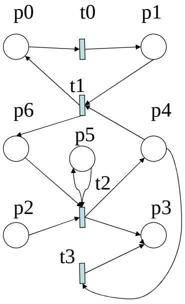
Invariantes de Lugar

0	1	2	3	0	1	2	3	4	5	6	
0	0	-1	1	0	0	1	0	0	0	0	2
0	0	1	-1	0	0	0	1	0	0	0	3
0	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	5
0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	6
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	



Invariantes de Lugar

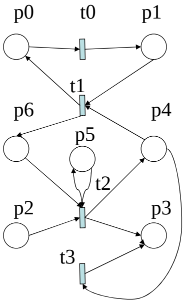
0	1	2	3	0	1	2	3	4	5	6	
0	0	-1	1	0	0	1	0	0	0	0	2
0	0	1	-1	0	0	0	1	0	0	0	3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	5
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	



Invariantes de Lugar

0	1	2	3	0	1	2	3	4	5	6	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	5
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	

Ip0={p5}
Ip1={p0,p1}
Ip2={p4,p6}
Ip3={p2,p3}



Propiedades Estruturales

Son propiedades inherentes a la estructura de la red. No dependen de los marcados del modelo.

- Limitación Estrutural
- Conservación Estrutural
- Repetitividad
- Consistencia

Propiedades Estruturales

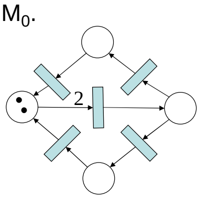
- Limitación Estructural - Sea una red R=(P,T,I,O) y M_0 un marcado inicial. R se define como estructuralmente limitada si R es limitada para cualquier M_0.

- Teorema- Una red R=(P,T,I,O) es estructuralmente limitada iif $\exists$ W tal que $W.C \leq 0$, donde $|W| = P$ y $\omega_i > 0$.

Cada lugar de la red R es limitado para cualquier marcado inicial finito M_0

Propiedades Estruturales

- Limitación Estructural - Sea una red R=(P,T,I,O) y M_0 un marcado inicial. R se define como estructuralmente limitada si R es limitada para cualquier M_0.



Propiedades Estruturales

- Límite Estructural de un Lugar

Dado que para una red estructuralmente limitada cualquier M' obedece a $M' \leq M_0 + C.S$, entonces $W.M \leq W.\ M_0$, donde $\omega_k > 0$, Por tanto para un lugar p_i cualquiera, tenemos:

$$M(p_i) \leq W.\ M_0 \ /\ W(p_i)$$
$$M(p_i) \leq \sum \omega_k .\ m_0(p_k) /\ \omega_i\ ,\ \forall p_k \in P$$

Propiedades Estruturales

- Límite Estructural de un Lugar

Sea W mínimo, tenemos:

$M(p_i) = \min\{ W.\ M_0 \ /\ W(p_i) \}$, $\forall$ W $\in$ BIS

BIS – base invariant support

Propiedades Estruturales

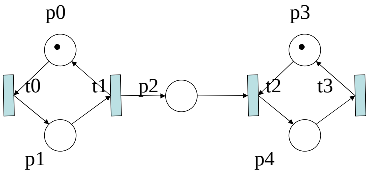
- Conservación Estructural - Sea una red R=(P,T,I,O) y M_0 un marcado inicial. R se define como estructuralmente conservativa si R es conservativa para cualquier M_0.

- Teorema- Una red R=(P,T,I,O) es estructuralmente conservativa iif $\exists$ W tal que $W.C = 0$, donde $|W| = P$ y $\omega_i > 0$.

Existe un entero positivo y(P) para <u>cada</u> lugar P de tal forma que la suma ponderada de marcas, $M^T.y = M_0^T.y$, es constante para todo $M \in A(R, M_0)$ para cualquier marcado inicial finito M_0

Propiedades Estruturales

- Conservación Estructural



SP1={p0, p1}
SP2={p3, p4}

- Red no estructuralmente conservativa

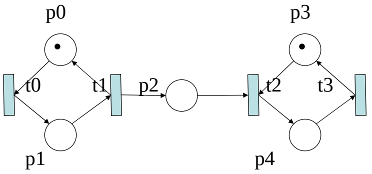
Propiedades Estruturales

- Conservación Estrutural Parcial - Sea una red R=(P,T,I,O) y M_0 un marcado inicial. R se define como estructuralmente parcialmente conservativa si R tiene algún componente conservativo para cualquier M_0.
- Teorema- Una red R=(P,T,I,O) es estructuralmente parcialmente conservativa iif $\exists W \neq 0$ tal que $W.C = 0$, donde $|W| = P$ y $\omega_i \geq 0$.

Existe un entero positivo y(P) para <u>algún</u> lugar P de tal forma que la suma ponderada de marcas, $M^T.y = M_0^T.y$, es constante para todo $M \in A(R, M_0)$ para cualquier marcado inicial finito M_0

Propiedades Estruturales

- Conservación Estructural Parcial



SP1={p0, p1}
SP2={p3, p4}

•Red parcialmente estruturalmente conservativa

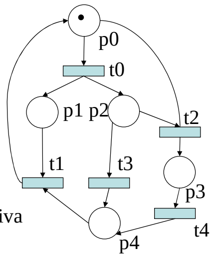
Propiedades Estruturales

- Repetitividad - Sea una red R=(P,T,I,O). R se define como repetitiva si $\exists M_0$ tal que $M_0[s>M'$, donde $M' \geq M_0$ y $\overline{S}>0$ donde $s_i > 0$
- Teorema- Una red R=(P,T,I,O) es repetitiva iif $\exists \overline{S}$ tal que $C.\overline{S} \geq 0$, donde $|\overline{S}| = T$ y $s_i>0$.

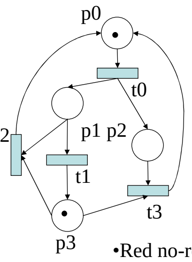
Existe un marcado inicial finito M_0 y una secuencia de disparos S a partir de M_0 tal que <u>cualquier</u> transición ocurre <u>infinitamente</u> en S

Propiedades Estruturales

- Repetitividad



•Red repetitiva



•Red no-repetitiva

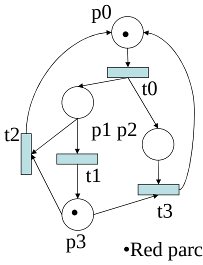
Propiedades Estruturales

- Repetitividad Parcial- Sea una red R=(P,T,I,O). R se define como parcialmente repetitiva si $\exists M_0$ tal que $M_0[s>M'$, donde $M' \geq M_0$ y $\overline{S} \neq 0$, donde $s_i \overline{\geq} 0$.
- Teorema- Una red R=(P,T,I,O) es repetitiva iif $\exists S \neq 0$ tal que $C.S \geq 0$, donde $|S| = T$ y $s_i \geq 0$.

Existe un marcado inicial finito M_0 y una secuencia de disparos S a partir de M_0 tal que <u>alguna</u> transición ocurre <u>infinitamente</u> en S

Propiedades Estruturales

- Repetitividad Parcial



•Red parcialmente repetitiva

Propiedades Estruturales

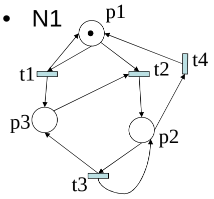
- Consistencia - Sea una red $R=(P,T,I,O)$. R se define como consistente si $\exists\ M_0$ tal que $M_0[s> M_0$, donde $M'= M_0$ y $S>0$ donde $s_i > \overline{0}$.

- Teorema- Una red $R=(P,T,I,O)$ es consistente iif $\exists\ \overline{S}$ tal que $C.\overline{S} = 0$, donde $|\overline{S}| = T$ y $\overline{s}_i>0$.

Existe un marcado inicial finito M_0 y una secuencia de disparos S a partir de M_0 que vuelve a M_0 tal que cualquier transición ocurre al menos una vez en S

Propiedades Estruturales

- N1



•Consistente

Propiedades Estruturales

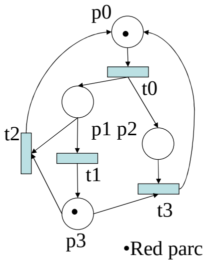
- Consistencia Parcial- Sea una red $R=(P,T,I,O)$. R se define como parcialmente consistente si $\exists\ M_0$ tal que $M_0[s> M_0$, donde $M'= \overline{M}_0$ y $S \neq 0$, donde $s_i \geq 0$.

- Teorema- Una red $R=(P,T,I,O)$ es parcialmente consistente iif $\exists\ \overline{S} \neq 0$ tal que $C.\overline{S} = 0$, donde $|\overline{S}| = T$ y $s_i \geq 0$.

Existe un marcado inicial finito M_0 y una secuencia de disparos S a partir de M_0 que vuelve a M_0 tal que alguna transición ocurre al menos una vez en S

Propiedades Estruturales

- Consistencia Parcial



•Red parcialmente consistente

Reducciones

- Análisis por transformación
  - El análisis de redes de grandes dimensiones no es un problema trivial
  - Las reduccioness son utilizadas para análisis
  - El refinamiento es utilizado en la síntesis

Redes Temporizadas

- Ramchandani, 1973 - Transition Timed Net
- Merlin, 1976 - Transition Time Net
- Sifakis, 1977 - Place Timed Net

Redes Temporizadas Estocásticas

- Natkin - 1980
- Molloy - 1981
- Marsan et al. - 1984

Es una red temporizada donde el *delay* asociado a una transición es una variable aleatoria de distribución exponencial

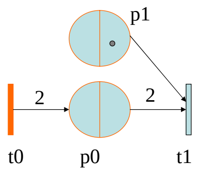
---

Redes Temporizadas

- Redes de Petri con Lugares Temporizados (PTPN) (Sifakis77)
- Definición: PTPN=$(P,T,F,K,W,M_0,\Gamma,\upsilon)$, donde
  - P es el conjunto de lugares,
  - T es el conjunto de transiciones,
  - $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ una relación que representa los arcos
  - W Valoración (peso de los arcos) - $W: F \rightarrow N$
  - M_0 Marcado inicial - $M_0: P \rightarrow N$
  - $\Gamma=\{\gamma_1, \gamma_2,\ldots, \gamma_i,\ldots\}$ números reales denominada base de tiempos.
  - $\upsilon: P \rightarrow \Gamma$ una función $\upsilon(p) = \gamma_j$

Redes Temporizadas
- PTPN -

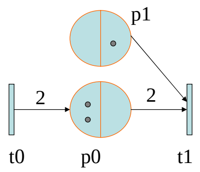
- Regla de Disparo



υ(p0) = 3

Redes Temporizadas
- PTPN -

- Regla de Disparo

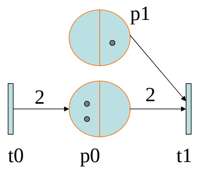


υ(p0) = 3

Instante=0

Redes Temporizadas
- PTPN -

- Regla de Disparo

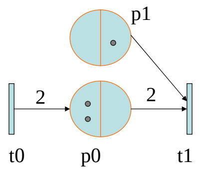


υ(p0) = 3

Instante=1

Redes Temporizadas
- PTPN -

- Regla de Disparo

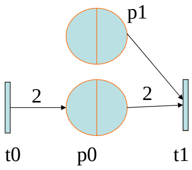


υ(p0) = 3

Instante=2

Redes Temporizadas
- PTPN -

- Regla de Disparo



υ(p0) = 3 Instante=3

Redes Temporizadas Estocásticas

- Modelado para Análisis de Prestaciones
  - Modelos para Simulación
  - Modelos Analíticos
    - Cadenas de Markov
    - Teoria de Colas
    - Redes de Petri

Redes Temporizadas Estocásticas

- Proriedad Markoviana
  - Ausencia de Memoria
- Variables Aleatorias con Propiedad Markoviana
  - Variable Aleatoria Geométrica
  - Variable Aleatoria Exponencial