

# Capítulo 3

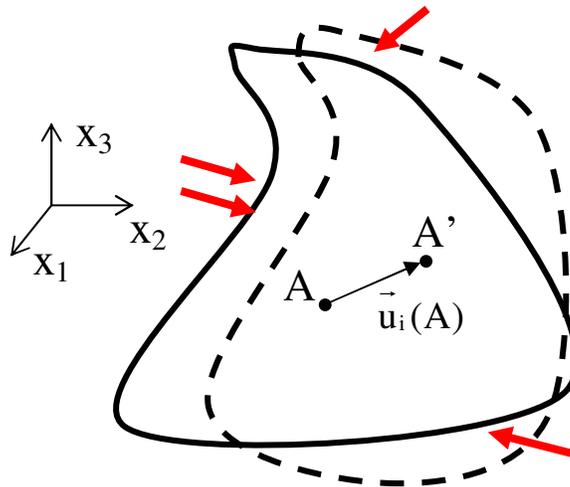
## Deformación.

(“alla breve”)

La capacidad más característica del sólido deformable es precisamente la de poder deformarse, es decir experimentar cambios de forma como consecuencia de las acciones que se le aplican. Este capítulo presenta las magnitudes tensoriales que caracterizan localmente a la deformación, así como su relación con el campo de movimientos del sólido.

### 3.1.- Análisis de la deformación en el entorno de un punto.

Vamos a considerar la deformación de un sólido como una relación biunívoca y continua entre la posición que ocupa cada punto material del sólido en un estado de referencia, que llamaremos estado inicial o indeformado, y la posición que ocupa en un estado final o deformado. El exigir que esa relación sea biunívoca y continua excluye por ejemplo que a un punto material correspondan dos posiciones distintas de destino, lo que podría darse en situaciones como la propagación de una grieta. Consideraremos estas situaciones de discontinuidad como excepcionales, siendo preciso un análisis especial para su estudio, el cual excede el ámbito de la presente exposición.

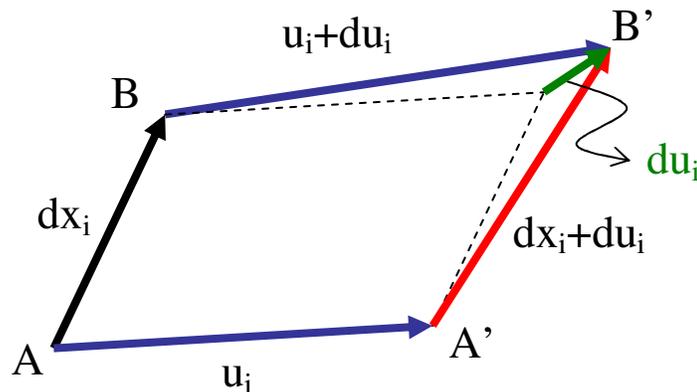


**Figura 3.1.-** Estados deformado e indeformado de un sólido.

Adoptaremos un sistema de coordenadas cartesianas  $x_1, x_2, x_3$  para describir los puntos del espacio. Este sistema de coordenadas será inmóvil, en el sentido de que sólo

consideraremos que un punto material se ha movido si el valor de sus coordenadas ha cambiado en este sistema. La figura 3.1 representa los estados indeformado y deformado (en línea de puntos) de un sólido. Llamaremos A a la posición que ocupa un punto material del sólido en el estado inicial, y A' a la posición que ese mismo punto material ocupa en el estado final. Definimos el movimiento de ese punto como el vector  $\mathbf{u}$ , de componentes  $u_i$ , que une las posiciones final e inicial. De acuerdo con las hipótesis básicas que se enunciaron en el capítulo 1, se asume que los desplazamientos son pequeños comparados con las dimensiones del sólido. Más precisamente, y en lo que al modelo matemático se refiere, asumiremos que los desplazamientos son del orden de magnitud de los diferenciales de longitud que adoptemos.

Pretendemos obtener una magnitud tal que, sabido su valor en un punto, permita conocer el incremento de longitud de cualquier segmento recto diferencial que pase por ese punto. Esta idea es en realidad análoga a la que hemos desarrollado para las tensiones: en aquel caso había infinitos planos posibles que pasaban por el punto, y en este caso hay infinitas orientaciones posibles del segmento diferencial. Para las tensiones encontramos una magnitud (el tensor de tensiones) que permitía obtener el vector tensión en cualquier plano. En el estudio de la deformación, buscamos una magnitud que permita conocer el incremento de longitud de cualquier segmento.



**Figura 3.2.-** Posiciones inicial y final de dos puntos próximos.

Para tal fin, consideremos dos puntos del sólido, separados por una distancia diferencial, que en estado inicial ocupan las posiciones A y B, y que pasan a las posiciones finales A' y B' como se indica en la figura 3.2. Sean  $x_i$  las coordenadas de la posición A, y  $u_i$  los movimientos del punto correspondiente. La posición B tendrá coordenadas ligeramente distintas,  $x_i + dx_i$ , y los movimientos del punto material correspondiente serán también ligeramente distintos,  $u_i + du_i$ . El diferencial de movimiento,  $du_i$ , se interpreta físicamente como la diferencia de movimientos entre esos dos puntos muy próximos, y será un diferencial de 2º orden. Puede expresarse matemáticamente de la forma habitual como:

$$du_i = u_{i,j} dx_j$$

La magnitud  $u_{i,j}$  describe el campo de movimientos del sólido, ya que si se conoce su valor,

en todos los puntos, la igualdad anterior permitiría calcular el desplazamiento de cualquier punto del sólido mediante integración y aplicación de las condiciones de contorno adecuadas. Además la “regla del cociente” asegura que  $u_{i,j}$  es un tensor (aunque no simétrico), ya que tanto el diferencial de desplazamiento como el de longitud lo son.

El inconveniente principal que tendría utilizar esta magnitud para describir el estado local de deformación sería que tomaría valores distintos para estados de desplazamientos locales que fuesen iguales salvo un movimiento como sólido rígido. Precisamente, nuestra intención es conseguir una magnitud representativa de la deformación (“cambio de la forma”, en sentido estricto), siendo por tanto deseable que sea insensible frente a movimientos de sólido rígido, en los que no hay deformación propiamente dicha. Para conseguir esto, planteamos el artificio de sumar y restar  $u_{j,i}/2$  y agrupar términos de la siguiente forma:

$$du_i = u_{i,j} dx_j = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) dx_j + \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) dx_j = \varepsilon_{ij} dx_j + \omega_{ij} dx_j \quad (3.1)$$

Aparecen así dos nuevos tensores, cuyas expresiones en función del campo de desplazamientos son:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (3.2)$$

O en forma matricial desarrollada,

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & \frac{u_{1,2} + u_{2,1}}{2} & \frac{u_{1,3} + u_{3,1}}{2} \\ \frac{u_{2,1} + u_{1,2}}{2} & u_{2,2} & \frac{u_{2,3} + u_{3,2}}{2} \\ \frac{u_{3,1} + u_{1,3}}{2} & \frac{u_{3,2} + u_{2,3}}{2} & u_{3,3} \end{bmatrix} ; \quad \underline{\underline{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{u_{1,2} - u_{2,1}}{2} & \frac{u_{1,3} - u_{3,1}}{2} \\ \frac{u_{2,1} - u_{1,2}}{2} & 0 & \frac{u_{2,3} - u_{3,2}}{2} \\ \frac{u_{3,1} - u_{1,3}}{2} & \frac{u_{3,2} - u_{2,3}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

El primero,  $\varepsilon_{ij}$ , es un tensor simétrico ( $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ ), mientras que el segundo,  $\omega_{ij}$ , es un tensor antisimétrico ( $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ ): su matriz asociada coincide con “menos su traspuesta” y tiene ceros en su diagonal. El que ambos son efectivamente tensores es nuevamente inmediato por aplicación de la “regla del cociente”.

Otra particularidad interesante es que el término  $\omega_{ij}dx_j$  de (3.1) resulta ser perpendicular al vector  $dx_j$ . Véase que en efecto, el producto escalar de ambos vectores es nulo:

$$(dx_i) (\omega_{ij} dx_j) = \omega_{ij} dx_i dx_j = \omega_{12} dx_1 dx_2 + \omega_{13} dx_1 dx_3 + \omega_{21} dx_2 dx_1 + \omega_{23} dx_2 dx_3 + \omega_{31} dx_3 dx_1 + \omega_{32} dx_3 dx_2 = (\text{los sumados } 1^\circ \text{ y } 3^\circ \text{ se cancelan, así como los } 2^\circ \text{ y } 4^\circ, \text{ y los } 3^\circ \text{ y } 6^\circ) = 0$$

Por tanto, en la fig. 3.2 podemos descomponer el vector  $du_i$  en los dos sumandos dados por la ecuación (3.1). Nótese que ambos son diferenciales de segundo orden. El trazado resultante se muestra en la fig. 3.3, en la que se ha dibujado en primer lugar el término  $\omega_{ij} dx_j$ , que es perpendicular a  $dx_j$  (o segmento AB). El efecto de este sumando es el de cambiar la orientación de AB en un ángulo diferencial de primer orden, y producir un incremento de longitud que será despreciable en esta formulación. Para razonar esto último, recuérdese que el coseno de un ángulo pequeño, digamos  $\theta$ , admite desarrollo de la forma  $1 - \theta^2/2 + \dots$ , de forma que el incremento de longitud debido a este efecto sería del orden de  $\theta^2 \cdot dx$ , es decir de tercer orden, y vemos que el primer sumando de (3.1), que no tiene porqué ser perpendicular a  $dx$ , producirá incrementos de longitud de segundo orden, y por tanto dominantes.

En cuanto al segundo sumando,  $\varepsilon_{ij} dx_j$ , cabe apuntar que, de igual forma que no esperamos que sea perpendicular a  $dx$ , tampoco hay ningún motivo para pensar que deba ser paralelo. Por ello el vector correspondiente se ha dibujado formando un cierto ángulo (no diferencial) respecto del segmento AB.

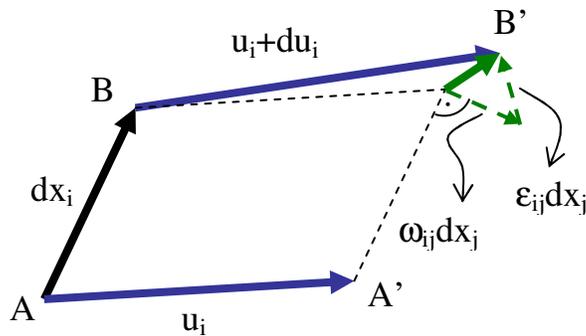


Figura 3.3.- Descomposición del diferencial de movimiento.

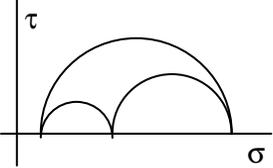
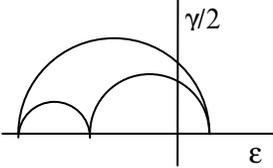
A la vista de lo anterior, es evidente que todo el incremento de longitud del segmento está asociado al primer sumando de (3.1), el vector  $\varepsilon_{ij} dx_j$ . Dicho incremento de longitud será la proyección del vector  $\varepsilon_{ij} dx_j$  sobre la dirección del segmento AB. Esta proyección dividida por la longitud inicial de AB será el incremento de longitud unitario de este segmento:

$$\frac{\Delta \text{Long}}{\text{Long}} = \frac{(\varepsilon_{ij} dx_j) \cdot (dx_i / |dx|)}{|dx|} = \varepsilon_{ij} n_j n_i = \varepsilon_i n_i = \varepsilon \quad (3.3)$$

Como se aprecia, hemos introducido la denominación  $\varepsilon$  (escalar) para dicho incremento de longitud unitario, que denominaremos “deformación longitudinal” ó “deformación normal”. El hecho relevante que muestra el desarrollo anterior es que, conocidos los 6 escalares  $\varepsilon_{ij}$  en un punto, es posible calcular el incremento de longitud unitario de cualquier segmento diferencial de dirección  $\mathbf{n}$  que pase por ese punto. Para ello sólo hay que efectuar la sencilla operación  $\varepsilon_{ij} n_j n_i$ , como aparece en (3.3). Por tanto el tensor  $\varepsilon_{ij}$  es la magnitud que nos

proponíamos encontrar. Se denomina “Tensor de Cauchy” o “Tensor de Pequeñas Deformaciones”.

Es muy notoria la similitud formal entre la expresión  $\epsilon = \epsilon_{ij}n_i n_j$  recién obtenida y la  $\sigma = \sigma_{ij}n_i n_j$  obtenida en el capítulo anterior, que expresa la componente normal de tensión. De hecho es posible plantear una analogía muy completa entre el tratamiento del problema de tensión y el de deformación del entorno de un punto. Esta analogía permite razonar, sin necesidad de nuevos desarrollos, que gran parte de las operaciones y conceptos presentados en el ámbito de la tensión son directamente generalizables en el ámbito de la deformación (y en realidad generalizables al ámbito de cualquier otra magnitud que pudiera expresarse mediante un tensor simétrico de segundo orden). A continuación se destacan los aspectos más relevantes de dicha analogía:

<b>Tensión</b>	<b>Deformación</b>
$n_i$ vector normal al plano	$n_i$ vector en dirección del segmento
$\sigma$ tensión normal	$\epsilon$ deformación normal ( $\Delta$ Long. unitario)
$T_i$ (vector tensión) = $\sigma_{ij}n_j$	$\epsilon_i = \epsilon_{ij}n_j$ (definición de $\epsilon$ vector)
$\tau$ (tensión tangencial) = $\sqrt{T_i T_i - \sigma^2}$	$\gamma/2 = \sqrt{\epsilon_i \epsilon_i - \epsilon^2}$ (definición de “deformación transversal”)
Direcciones principales de tensión. (aquellas con $\tau = 0$ )	Direcciones principales de deformación. (aquellas con $\gamma/2 = 0$ )
Diagramas de Mohr: 	Diagramas de Mohr: 

En el cuadro anterior se ha introducido la definición de dos nuevas magnitudes: el “vector deformación”  $\epsilon_i$  y la “deformación transversal”  $\gamma/2$ . Por el momento, y hasta la lectura del apartado siguiente, pueden considerarse estas denominaciones como meras convenciones, ya que simplemente se han presentado como fruto de una analogía.

No obstante, su sola definición ya pone de manifiesto que será posible realizar diagramas de Mohr también en deformaciones, representando las componentes normal y transversal del vector deformación, de la misma forma que en tensión se realizaban representando las componentes normal y tangencial del vector tensión. Por su propia construcción, no existe duda de que estas representaciones gozarán de idénticas propiedades en los dos ámbitos. La duda que puede plantearse en este momento es si tendrán o no interés dichas representaciones en el ámbito de la deformación. Evidentemente, dicho interés estará en función del posible significado físico que podamos atribuir a las magnitudes que representamos, en particular a  $\gamma/2$ , que acabamos de introducir de forma un tanto convencional. Veremos en el apartado siguiente que sí tiene un significado físico concreto,

y que la representación de Mohr es efectivamente interesante (no siempre resulta así; por ejemplo, para las magnitudes de inercia asociadas al sólido rígido, que también pueden describirse mediante un tensor simétrico de orden 2, la representación de Mohr, aunque posible, suele considerarse de escaso interés).

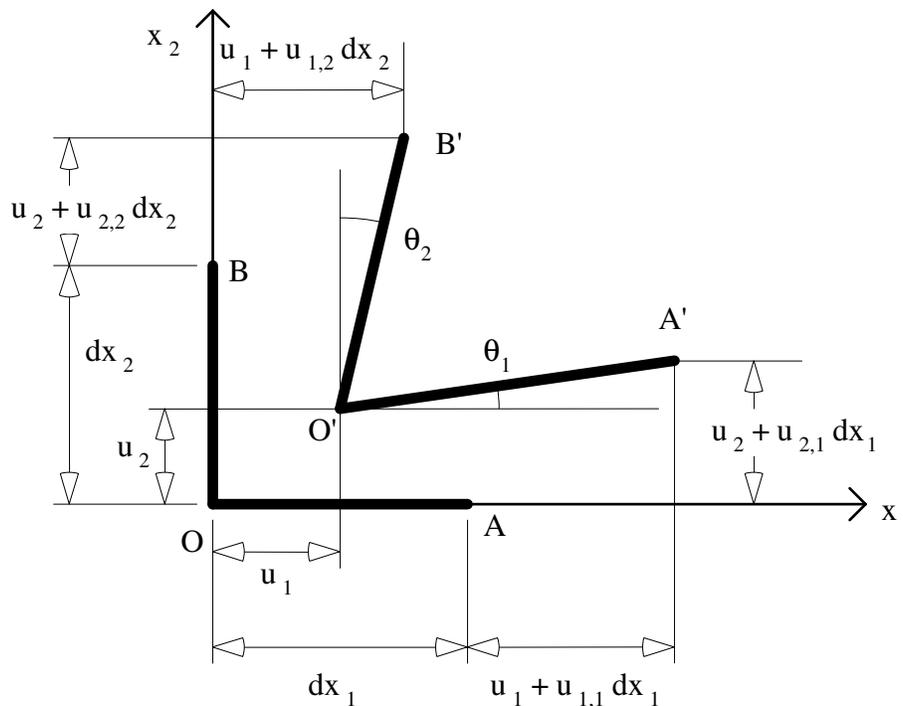
### 3.2.- Interpretación física de las magnitudes asociadas a la deformación.

#### a) Interpretación de los términos de $\epsilon_{ij}$

En primer lugar, si consideramos un segmento diferencial dirigido según uno de los ejes coordenados, por ejemplo  $\mathbf{n} (1,0,0)$ , su incremento de longitud unitario calculado según (3.3) será:

$$\epsilon = n_i \epsilon_{ij} n_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \epsilon_{11}$$

Es decir que  $\epsilon_{11}$  es el incremento de longitud unitario de un segmento diferencial dirigido inicialmente según el eje  $x_1$ . Los términos  $\epsilon_{22}$  y  $\epsilon_{33}$  admiten una interpretación análoga en las direcciones  $x_2$  y  $x_3$  respectivamente.



**Figura 3.4.-** Movimiento de segmentos paralelos a los ejes coordenados (proyección sobre el plano 12).

Para encontrar el significado físico de los términos no diagonales de  $\varepsilon_{ij}$ , analizaremos los movimientos de dos segmentos OA y OB, perpendiculares entre sí e inicialmente paralelos a dos de los ejes coordenados, como muestra la figura 3.4.

Calcularemos los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  que forman los segmentos deformados con su orientación inicial. Estos ángulos serán pequeños (diferenciales de primer orden), por lo que podemos aproximar su valor por el de su tangente. Despreciando diferenciales de orden superior, tenemos:

$$\theta_1 \cong \operatorname{tg}\theta_1 = \frac{u_{2,1}dx_1}{dx_1 + u_{1,1}dx_1} \cong \frac{u_{2,1}dx_1}{dx_1} = u_{2,1} ; \theta_2 \cong \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{u_{1,2}dx_2}{dx_2 + u_{2,2}dx_2} \cong \frac{u_{1,2}dx_2}{dx_2} = u_{1,2}$$

La suma de ambos ángulos es lo que se aparta de  $\pi/2$  el ángulo inicialmente recto que formaban los segmentos paralelos a los ejes. Llamaremos a esta cantidad  $\gamma_{12}$ . Por lo tanto,

$$\gamma_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} = 2\varepsilon_{12} \quad (3.4)$$

Es decir, que los términos no diagonales del tensor representan la mitad de lo que se cierra el ángulo recto que forman segmentos inicialmente paralelos a los ejes correspondientes a los subíndices.

Aunque ya no es necesario, puede llegarse también a partir de la fig. 3.4 a la conclusión de que los términos diagonales representan las deformaciones longitudinales unitarias de segmentos dirigidos según los ejes. Para ello basta con apreciar que el incremento de longitud de, por ejemplo, OA, puede obtenerse con error despreciable a partir de la proyección sobre  $x_1$  de su estado final, dado que el ángulo que ha girado será en todo caso diferencial. Es inmediato observar que el incremento absoluto de longitud así medido será  $u_{1,1}dx_1$ , y por lo tanto el incremento relativo será  $u_{1,1} = \varepsilon_{11}$ , como ya habíamos obtenido.

#### b) Interpretación de los términos de $\omega_{ij}$

Conviene comenzar poniendo de manifiesto que un producto del tipo  $\omega_{ij}dx_j$  admite ser expresado como producto vectorial de un cierto vector  $\boldsymbol{\omega}$  por el vector  $d\mathbf{x}$ . En la disciplina de álgebra suele estudiarse esta propiedad bajo un título como “vector dual asociado a una matriz hemisimétrica”, o similar. Su demostración es inmediata sin más que igualar términos e identificar componentes:

$$\begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{12}dx_2 + \omega_{13}dx_3 \\ -\omega_{12}dx_1 + \omega_{23}dx_3 \\ -\omega_{13}dx_1 - \omega_{23}dx_3 \end{bmatrix} ; \quad \overline{\boldsymbol{\omega}} \times \overline{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \omega_2dx_3 - \omega_3dx_2 \\ -\omega_1dx_3 + \omega_3dx_1 \\ \omega_1dx_2 - \omega_2dx_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \omega_{12} = -\omega_{31} ; \omega_{23} = -\omega_{13} ; \omega_{31} = -\omega_{12} \quad (3.5)$$



$$dx_1 = (PQ)_1 = |PQ| \cos \phi \cos \theta$$

$$dx_2 = (PQ)_2 = |PQ| \cos \phi \sin \theta$$

$$dx_3 = (PQ)_3 = |PQ| \sin \phi$$

Con lo que:

$$du_1 = u_{1,1}|PQ| \cos \phi \cos \theta + u_{1,2}|PQ| \cos \phi \sin \theta + u_{1,3}|PQ| \sin \phi$$

$$du_2 = u_{2,1}|PQ| \cos \phi \cos \theta + u_{2,2}|PQ| \cos \phi \sin \theta + u_{2,3}|PQ| \sin \phi$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \text{giro}_3 = & \left( u_{2,1} \cos^2 \theta + u_{2,2} \sin \theta \cos \theta + u_{2,3} \frac{\sin \phi \cos \theta}{\cos \phi} \right) - \\ & - \left( u_{1,1} \cos \theta \sin \theta + u_{1,2} \sin^2 \theta + u_{1,3} \frac{\sin \phi \sin \theta}{\cos \phi} \right) \end{aligned}$$

Consideremos por un momento  $\phi$  constante. Ello equivale a considerar sólo los segmentos que están sobre un cono de eje 3 en lugar de todos los segmentos posibles. Para calcular el promedio del giro de estos segmentos en torno al eje 3, integramos respecto de  $\theta$ :

$$\text{promedio giro}_3(\phi = \text{cte}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0; \phi=\text{cte}}^{\theta=2\pi} \text{giro}_3 d\theta$$

Teniendo en cuenta que los valores medios de los productos de funciones trigonométricas que aparecen son:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = 1/2 ; \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = 0$$

El promedio del giro de los segmentos considerados es:

$$\text{promedio giro}_3(\phi = \text{cte}) = \frac{1}{2}(u_{2,1} - u_{1,2})$$

Apreciamos que este promedio de giro de los segmentos que tienen  $\phi=\text{cte}$  no depende del propio ángulo  $\phi$ . Por tanto, el valor promedio anterior es también el promedio del giro de todos los segmentos diferenciales del entorno de P. Además, vemos que este valor coincide con el de la tercera componente del vector rotación:

$$\text{promedio giro}_3 = \frac{1}{2}(u_{2,1} - u_{1,2}) = \omega_3 \quad (3.6)$$

El resultado anterior puede reproducirse de manera análoga para las componentes 1 y 2, con lo que se demuestra que las componentes del que hemos llamado vector rotación representan efectivamente los promedios del giro del entorno del punto considerado alrededor de cada eje.

Otra apreciación interesante es que el promedio del giro del entorno del punto en torno a cada eje puede calcularse como el promedio de giro respecto de ese eje de dos segmentos cualesquiera perpendiculares entre sí y perpendiculares al eje. En efecto, nótese que en (3.6),  $u_{2,1}$  representa el giro en torno al eje 3 de un segmento sobre el eje 1, y análogamente que  $-u_{1,2}$  representa el giro entorno al eje 3 de un segmento sobre el eje 2. Como no hemos impuesto ninguna condición al elegir los ejes, (3.6) se satisfará independientemente de la elección de ejes 1 y 2 (perpendiculares a 3).

Como última apreciación, y volviendo sobre la figura 3.3 sabiendo ya el significado físico de  $\omega_{ij}$ , podemos considerar el movimiento del segmento AB descompuesto de la siguiente manera: Una traslación que lleva al punto inicialmente en A a su posición final A', más una rotación con el punto en A' fijo, que coincide con la rotación promedio del entorno, más otro movimiento que lleva el punto inicialmente en B a su posición final B', también con A' fijo. Este último movimiento implica en general tanto un cambio de longitud del segmento como un cambio de orientación.

### c) Interpretación del vector $\epsilon_i$ y sus componentes

Dado que  $\epsilon_i = \epsilon_{ij} n_j = \epsilon_{ij} dx_j / |dx|$ , es claro que el vector  $\epsilon_i$  es colineal con el vector  $\epsilon_{ij} dx_j$  representado en la fig. 3.3. La figura 3.6 ilustra la posición y orden de magnitud de este vector, que en sí mismo no tiene una interpretación física que pueda resultarnos interesante. Sin embargo, sus componentes intrínsecas sí la tienen. De hecho ya hemos visto que su componente normal,  $\epsilon = \epsilon_i n_i$ , es el incremento de longitud unitario del segmento considerado.

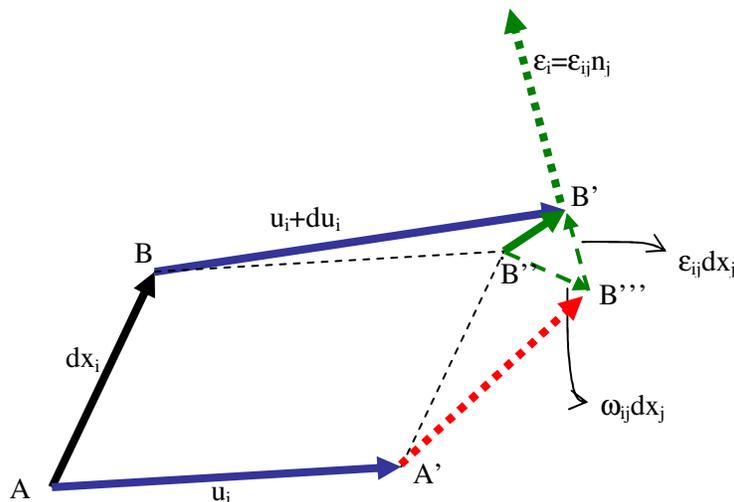
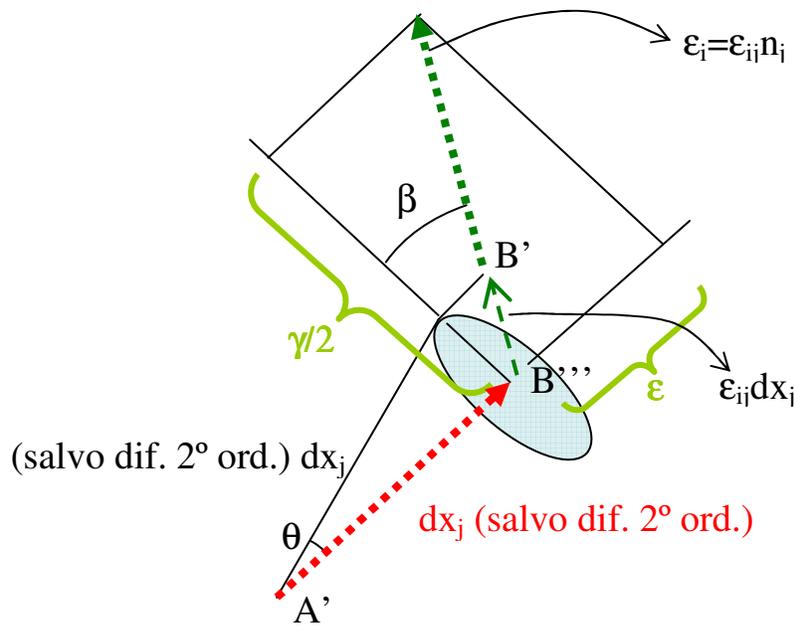


Figura 3.6.- Vector deformación.

Veremos a continuación que la componente transversal  $\gamma/2$  también tiene una interpretación física interesante. La fig 3.7 muestra el segmento considerado con sus extremos en las

posiciones A' y B''' indicadas en la fig. 3.6, es decir, tras la traslación y rotación promedio descritas en un párrafo anterior. Por lo demás, la fig. 3.7 puede considerarse como un detalle o subconjunto de la fig. 3.6, en el que se ha dado nombre ( $\theta$ ) al ángulo diferencial que girará el segmento a partir de la posición representada, y también ( $\beta$ ) al ángulo que forma el vector deformación con el plano perpendicular al segmento. Nótese que este último ángulo será sensiblemente el mismo tanto si decidimos considerar el segmento en su posición inicial, final, o tras aplicar sólo el giro promedio (esa casuística produce sólo variaciones diferenciales de la orientación del segmento, mientras que  $\beta$  es un ángulo finito). En la fig. 3.7 aparezcan indicaciones “salvo dif. 2º orden” junto a las diversas posiciones del segmento AB, porque es indiferente qué posición se tome, tanto a efectos de cálculo de  $\beta$  como para ser usado como divisor en el eventual cálculo de una deformación unitaria, como se hará de inmediato.



**Figura 3.7.-** Componente transversal y normal del vector deformación.

Expuesto lo anterior, es sencillo demostrar que el ángulo diferencial  $\theta$  que gira el segmento a partir de la posición representada coincide con lo que hemos llamado deformación transversal  $\gamma/2$ . En efecto, teniendo en cuenta que  $dx_j/|dx_i|=n_j$ , tenemos que:

$$\theta \cong \operatorname{tg} \theta = \frac{|\epsilon_{ij} dx_j| \cos \beta}{|dx_i|} = |\epsilon_{ij} n_j| \cos \beta = |\epsilon_i| \cos \beta = \gamma / 2 \quad (3.7)$$

No debe sorprender que, a la vista de la fig. 3.7, lo anterior implique calcular un ángulo como medida de una longitud. Nótese que  $\gamma/2$  es adimensional, y su “longitud” puede perfectamente expresar un ángulo en radianes. En definitiva, la deformación transversal  $\gamma/2$  se interpreta como el ángulo que gira un segmento AB, medido a partir del movimiento

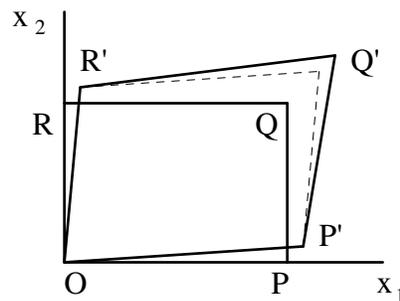
como sólido rígido que lleva A a su posición final y aplica al segmento la rotación promedio del entorno.

### 3.3.- Incremento de longitud, superficie y volumen de regiones finitas.

Para conocer el incremento de longitud  $\Delta s$  de una línea  $s$  contenida en el sólido o en su superficie, integraremos los incrementos de longitud de cada segmento diferencial de la línea. Para ello es necesario conocer el valor del tensor de deformaciones en cada punto de esa línea. Así, siendo  $n_i$  el vector tangente a la curva en cada punto, y  $\epsilon_{ij}$  el tensor de deformaciones en el mismo punto, tenemos:

$$\Delta L = \int_L \epsilon dL = \int_L \epsilon_j n_j dL = \int_L \epsilon_{ij} n_i n_j dL \quad (3.8)$$

Para calcular el incremento de superficie de una superficie elemental  $dA$ , perteneciente a una superficie finita  $A$  que puede estar en el contorno del sólido o ser interior al mismo, tomaremos unos ejes coordenados de forma que dos de ellos (ejes 1 y 2) estén en el plano tangente a la superficie  $A$  en el punto considerado, y calcularemos el incremento de área de un elemento de lados inicialmente paralelos a esos ejes. La figura 3.8 muestra tal elemento diferencial, de área  $OPQR$ . Se supone sin pérdida de generalidad que el punto  $O$  no se mueve. Tras la deformación el elemento de área deja de estar contenido en el plano 12, mostrándose en la figura su proyección sobre este plano. Entre los lados del elemento de área y sus proyecciones existe una diferencia de longitud de tercer orden. A la vista del desarrollo que sigue, es claro que pueden despreciarse estas diferencias y calcular el incremento de área sobre la proyección en el plano 12 (las longitudes se multiplicarán siempre por otras longitudes al calcular áreas, por lo que esos diferenciales de tercer orden se multiplicarían por otros de primer orden, resultando términos de área de cuarto orden, despreciables frente a los de tercer orden que resultarán ser los significativos).



**Figura 3.8.-** Elemento de área paralelo a los ejes 1 y 2

Las proyecciones de los movimientos de los vértices sobre el plano 12, aproximadas mediante el primer término de su desarrollo en serie, son:

$$\begin{aligned} u_1(P) &= u_{1,1}dx_1 & u_1(R) &= u_{1,2}dx_2 & u_1(Q) &= u_{1,1}dx_1 + u_{1,2}dx_2 \\ u_2(P) &= u_{2,1}dx_1 & u_2(R) &= u_{2,2}dx_2 & u_2(Q) &= u_{2,1}dx_1 + u_{2,2}dx_2 \end{aligned}$$

El área inicial del elemento es  $dA=|OP||OR|=dx_1dx_2$ . El área final  $dA'$  será la suma de las áreas de los dos triángulos  $OP'Q'$  y  $OQ'R'$ . Cada una de estas áreas puede a su vez calcularse como la mitad del módulo del producto vectorial de dos de sus lados:

$$dA' = \frac{1}{2}|\mathbf{OQ}' \times \mathbf{OR}'| + \frac{1}{2}|\mathbf{OP}' \times \mathbf{OQ}'|$$

Despreciando diferenciales de cuarto orden, y tras agrupar términos, los valores absolutos de los productos vectoriales resultan ser independientes de las derivadas cruzadas  $u_{1,2}$ ,  $u_{2,1}$ :

$$\begin{aligned} |\mathbf{OQ}' \times \mathbf{OR}'| &= \begin{vmatrix} [dx_1 + u_1(Q)] & [dx_2 + u_2(Q)] \\ [u_1(R)] & [dx_2 + u_2(R)] \end{vmatrix} = dx_1dx_2(1 + u_{1,1} + u_{2,2}) \\ |\mathbf{OP}' \times \mathbf{OQ}'| &= \begin{vmatrix} [dx_1 + u_1(P)] & [u_2(P)] \\ [dx_1 + u_1(Q)] & [dx_2 + u_2(Q)] \end{vmatrix} = dx_1dx_2(1 + u_{1,1} + u_{2,2}) \end{aligned}$$

El área tras la deformación es por tanto  $dA' = dx_1dx_2(1 + u_{1,1} + u_{2,2})$ . El incremento unitario de área resulta:

$$\frac{dA' - dA}{dA} = u_{1,1} + u_{2,2} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} \quad (3.9)$$

En el resultado anterior se aprecia que en el incremento de área no intervienen las derivadas cruzadas del desplazamiento. Conocido el incremento unitario de área de un elemento diferencial, el cálculo del incremento de área de la superficie finita  $A$  se reduce a un problema de integración:

$$\Delta A = \int_A (\epsilon_{11} + \epsilon_{22})dA = \int_A [\epsilon(\alpha) + \epsilon(\beta)]dA \quad (3.10)$$

En la ecuación anterior los ejes 1 y 2 podrían ser cualesquiera perpendiculares entre sí, con tal que estén contenidos en el plano tangente a la superficie  $A$  en cada punto. En general, la superficie puede ser curva, en cuyo caso estas direcciones pueden no ser constantes al realizar la integral. Por ello se indica una segunda notación más explícita para la misma integral, en la que aparecen las deformaciones longitudinales  $\epsilon(\alpha)$  y  $\epsilon(\beta)$  asociadas a dos direcciones  $\alpha$  y  $\beta$ , que deben ser perpendiculares entre sí y contenidas en el plano tangente a la superficie en cada punto.

Puede demostrarse que en el incremento de volumen de un diferencial de volumen  $dV$  tampoco intervienen significativamente las derivadas cruzadas,  $u_{i,j}$  ( $i \neq j$ ), de los

desplazamientos. La demostración se basa en consideraciones análogas a las presentadas para el caso de incremento de área de superficies, y puede ser completada por el lector sin dificultad (utilice la propiedad de que el volumen de un paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores que describen sus aristas). Como consecuencia de lo anterior, en el incremento de volumen de un elemento diferencial de aristas inicialmente paralelas a los ejes sólo intervendrán los términos diagonales del tensor de deformación. Es decir, este incremento de volumen dependerá solo de las deformaciones longitudinales. Así, si el volumen inicial es  $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ , el volumen tras la deformación será  $dV' = dx_1(1+\epsilon_{11})dx_2(1+\epsilon_{22})dx_3(1+\epsilon_{33})$ , y el incremento de volumen unitario será, despreciando diferenciales de orden superior:

$$\frac{dV' - dV}{dV} = (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) = e \quad (3.11)$$

Por tanto, la dilatación cúbica unitaria (o incremento unitario de volumen) resulta ser el primer invariante del tensor de deformaciones, que llamaremos "e". El incremento de volumen de una región finita se calcula, una vez más, mediante integración:

$$\Delta V = \int_V (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) dV = \int_V e dV \quad (3.12)$$

### 3.6.- Obtención del campo de desplazamientos a partir de las deformaciones.

En este epígrafe estudiaremos las particularidades que presenta el problema del cálculo del campo de desplazamientos de un sólido conocido su campo de deformaciones. Las ecuaciones que definen el Tensor de Cauchy (3.2), se nos presentan en este caso como un sistema de ecuaciones diferenciales en las que las incógnitas a calcular son las funciones  $u_i$ , mientras que las componentes  $\epsilon_{ij}$  son funciones dadas.

#### Estructura básica de la solución.

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales dado por el primer conjunto de ecuaciones (3.2):

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.13)$$

Sabemos que si un cierto conjunto de tres funciones  $u_i^p$ ,  $i=1...3$  (que llamamos solución particular) son solución de este sistema, también será solución un nuevo campo de desplazamientos  $u_i$  obtenido como suma del anterior más otro campo  $u_i'$  que tenga asociado deformaciones nulas. En efecto, dada la linealidad del sistema de ecuaciones anterior, el

campo de deformaciones asociado a  $u_i$  será la suma de los asociados a  $u_i^p$  y a  $u'_i$ , y siendo nulo el segundo de ellos la deformación asociada a  $u_i$  será la misma que la asociada  $u_i^p$ . Por tanto, si  $u_i^p$  es solución (es decir, sus deformaciones son  $\epsilon_{ij}$ ), también lo será  $u_i$  (porque tendrá las mismas deformaciones). La solución general  $u_i$  tiene por tanto la expresión:

$$u_i = u_i^p + u'_i \quad (3.14)$$

La solución particular  $u_i^p$  será tal que sus deformaciones coincidan con las estipuladas en el sistema original de ecuaciones, y tendrá en general una expresión cerrada (no contendrá ningún parámetro indeterminado). La solución general del sistema homogéneo,  $u'_i$ , debe ser capaz de representar *cualquier* campo de movimientos posible que tenga asociadas deformaciones nulas, y por lo tanto deberá contener parámetros indeterminados para poder representar esa multiplicidad de posibilidades. Razonamientos directos basados en la definición del tensor de deformaciones conducen inmediatamente a la conclusión de que el único tipo posible de movimiento con deformación nula es un movimiento como sólido rígido. Aunque probablemente es innecesario incidir más en este aspecto, presentamos a modo de ejercicio una demostración formal de que es condición necesaria y suficiente para que no exista deformación el que los desplazamientos se correspondan con los de un movimiento como sólido rígido.

La implicación directa es evidente y se comprueba sin dificultad: Si  $u'_i$  representa un movimiento de sólido rígido, se puede expresar como una traslación más una rotación con un punto fijo (sea "o" este punto):  $u'_i = u^o_i + \omega^o_{ik}(x_k - x^o_k)$ . Por tanto:

$$\epsilon'_{ij} = 1/2(u'_{i,j} + u'_{j,i}) = 1/2[ u^o_{i,j} + \omega^o_{ik,j}(x_k - x^o_k) + \omega^o_{ik}(x_k - x^o_k)_{,j} + u^o_{j,i} + \omega^o_{jk,i}(x_k - x^o_k) + \omega^o_{jk}(x_k - x^o_k)_{,i} ]$$

Tanto  $\omega^o_{ij}$  como  $u^o_i$  son constantes, por lo que sus derivadas se anulan, con lo que:

$$\epsilon'_{ij} = 1/2[\omega^o_{ik}\delta_{kj} + \omega^o_{jk}\delta_{ki}] = 1/2[\omega^o_{ij} + \omega^o_{ji}] = (\omega^o_{ij} \text{ es antisimétrico}) = 0$$

Luego no hay deformación asociada a un movimiento como sólido rígido.

La implicación inversa, consistente en demostrar que si un movimiento transcurre sin deformación no existe más posibilidad que el que sea un movimiento como sólido rígido, se realiza también sin dificultad, aunque es preciso un proceso de integración. Si todas las componentes de deformación son nulas, tenemos:

$$u'_{1,1} = u'_{2,2} = u'_{3,3} = u'_{1,2} + u'_{2,1} = u'_{1,3} + u'_{3,1} = u'_{2,3} + u'_{3,2} = 0 \quad (3.15)$$

De las tres primeras igualdades anteriores se concluye que  $u_1$  no contiene a  $x_1$ ,  $u_2$  no contiene a  $x_2$ , y  $u_3$  no contiene a  $x_3$ . Las otras tres igualdades derivadas respectivamente respecto de  $x_3$ ,  $x_2$ , y  $x_1$ , proporcionan:

$$\begin{array}{lcl}
 u'_{1,23} + u'_{2,13} = 0 & & u'_{2,13} = 0 \\
 u'_{1,32} + u'_{3,12} = 0 & \Rightarrow & u'_{3,12} = 0 \\
 u'_{2,31} + u'_{3,21} = 0 & & u'_{1,23} = 0
 \end{array}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos escribir las siguientes expresiones para el campo de desplazamientos:

$$\begin{aligned}
 u'_1 &= f^1(x_2) + f^2(x_3) \\
 u'_2 &= f^3(x_1) + f^4(x_3) \\
 u'_3 &= f^5(x_1) + f^6(x_2)
 \end{aligned}$$

Estas expresiones introducidas en las tres últimas igualdades de (3.15) producen:

$$\begin{aligned}
 \frac{df^1(x_2)}{dx_2} + \frac{df^3(x_1)}{dx_1} &= 0 \\
 \frac{df^2(x_3)}{dx_3} + \frac{df^5(x_1)}{dx_1} &= 0 \\
 \frac{df^4(x_3)}{dx_3} + \frac{df^6(x_2)}{dx_2} &= 0
 \end{aligned}$$

Todos los términos de las ecuaciones anteriores deben ser constantes, porque cada ecuación correspondiente a su izquierda supone que la adición de una función de una variable independiente más otra función de otra variable independiente distinta sea cero. Esto no puede ocurrir en algún rango de valores de las variables a no ser que las funciones sean constantes, y que esas constantes se cancelen entre sí en cada ecuación. Por tanto:

$$\begin{aligned}
 \frac{df^1(x_2)}{dx_2} &= -\frac{df^3(x_1)}{dx_1} = K \\
 \frac{df^2(x_3)}{dx_3} &= -\frac{df^5(x_1)}{dx_1} = L \\
 \frac{df^4(x_3)}{dx_3} &= -\frac{df^6(x_2)}{dx_2} = M
 \end{aligned}$$

Siendo K, L y M constantes arbitrarias. Las ecuaciones anteriores son de integración inmediata, resultando las siguientes expresiones para las funciones  $f^k$  ( $k=1\dots6$ ):

$$\begin{array}{lcl}
 f^1(x_2) = Kx_2 + \text{cte} & & f^4(x_3) = Mx_3 + \text{cte} \\
 f^2(x_3) = Lx_3 + \text{cte} & & f^5(x_1) = -Lx_1 + \text{cte} \\
 f^3(x_1) = -Kx_1 + \text{cte} & & f^6(x_2) = -Mx_2 + \text{cte}
 \end{array}$$

Donde la indicación "cte" indica la adición de una constante arbitraria, distinta en cada ecuación. Tenemos así calculada la expresión del campo de desplazamientos  $u'_i$ :

$$\begin{aligned} u'_1 &= Kx_2 + Lx_3 + A \\ u'_2 &= -Kx_1 + Mx_3 + B \\ u'_3 &= -Lx_1 - Mx_2 + C \end{aligned}$$

Siendo A, B, C, constantes arbitrarias que agrupan a parejas de términos constantes ("cte") que provienen de la integración de las  $f^k$ . Es inmediato apreciar que la solución  $u'_i$  anterior consta de una traslación, de componentes A, B, C, y de una rotación, cuyo vector rotación tiene componentes -M, L, -K. Con esto queda demostrado que un movimiento sin deformaciones *siempre* ha de ser un movimiento como sólido rígido.

Volviendo a la estructura de la solución de desplazamientos (3.14), hemos visto que el término  $u'_i$  representa un movimiento arbitrario como sólido rígido, y que como tal contiene seis parámetros indeterminados. El cálculo de una solución particular  $u_i^p$  es un problema más o menos complicado, pero que una vez resuelto conduce a una expresión sin parámetros indeterminados. Por lo tanto, tal como hemos planteado nuestro problema, la solución quedará en función de seis parámetros indeterminados.

Lo anterior en el hecho de que el conocer las deformaciones del sólido no permite calcular unívocamente el campo de desplazamientos, ya que quedarían por determinar los seis grados de libertad asociados a la superposición de un movimiento arbitrario como sólido rígido. Sería necesario aplicar las condiciones de contorno en desplazamientos (sustentación del sólido) para determinar completamente el campo de desplazamientos.

#### Condiciones de integrabilidad del tensor de deformaciones.

En la discusión anterior hemos dado por supuesto que a unos términos dados  $\epsilon_{ij}$  del tensor de deformaciones les corresponde una cierta solución de desplazamientos  $u_i$ . En realidad, si se eligen arbitrariamente seis funciones para los seis términos del tensor de deformaciones, lo más probable es que no exista una solución de desplazamientos univaluada y continua asociada a esas deformaciones. En este apartado se presentan unas condiciones necesarias y suficientes para que los seis términos del tensor de deformaciones tengan asociado un campo de desplazamientos posible. Nos ocuparemos en primer lugar de la parte más difícil del problema, que es encontrar unas condiciones suficientes para que exista un campo de desplazamientos asociado a  $\epsilon_{ij}$ . El encontrar condiciones necesarias para que el sistema de ecuaciones diferenciales (3.13) tenga solución es sencillo, pudiéndose obtener una variedad de posibilidades dando por hecho que tal solución  $u_i$  existe, y realizando alguna manipulación matemática. Nosotros estaremos sólo interesados en comprobar si las condiciones suficientes que hayamos obtenido son también condiciones necesarias.

Pasamos pues a buscar unas condiciones suficientes para que el campo de desplazamientos sea univaluado. El desarrollo que sigue, debido a Cesario, permite encontrar estas condiciones suficientes.

En primer lugar, sabemos que el conocimiento del tensor de deformaciones en los puntos del sólido no basta para determinar completamente el campo de desplazamientos, ya que siempre quedaría la indeterminación asociada a un movimiento arbitrario como sólido rígido. Esta indeterminación queda eliminada, por ejemplo, si se especifica el desplazamiento  $u_i^o$  y la rotación media  $\omega_{ij}^o$  de un punto "o" del sólido, de coordenadas  $x_i^o$ . Supondremos como premisa básica que hemos realizado dicha especificación.

Sea A un punto arbitrario del sólido, cuyas coordenadas son  $x_i^A$  y cuyo desplazamiento es  $u_i^A$ . Planteamos la identidad siguiente:

$$\int_0^A du_i = u_i(x_1^A, x_2^A, x_3^A) - u_i(x_1^o, x_2^o, x_3^o) = u_i^A - u_i^o$$

En donde la integral se realiza a lo largo de cualquier línea rectificable que esté contenida en el sólido. Es inmediato que:

$$u_i^A = u_i^o + \int_0^A du_i = u_i^o + \int_0^A \epsilon_{ij} dx_j + \int_0^A \omega_{ij} dx_j \quad (3.16)$$

Queremos que en la última integral no aparezca  $\omega_{ij}$ , sino sus derivadas, para lo que vamos a realizar una integración por partes. Primero sustituimos  $dx_j$  por  $d(x_j - x_j^A)$ , lo que podemos hacer puesto que las coordenadas  $x_j^A$  son constantes (aunque arbitrarias) y su diferencial es nulo:

$$\begin{aligned} \int_0^A \omega_{ij} dx_j &= \int_0^A \omega_{ij} d(x_j - x_j^A) = \left[ \omega_{ij} (x_j - x_j^A) \right]_0^A + \int_0^A (x_j^A - x_j) \omega_{ij,k} dx_k = \\ &= \omega_{ij}^o (x_j^A - x_j^o) + \int_0^A (x_j^A - x_j) \omega_{ij,k} dx_k \end{aligned}$$

Vamos a ver que es posible expresar  $\omega_{ij,k}$  en función de derivadas de las deformaciones. Precisamente este es el motivo de que hayamos buscado la aparición de derivadas de la rotación en lugar de la rotación misma (téngase presente que pretendemos llegar a alguna ecuación que relacione las deformaciones entre sí). En efecto podemos escribir:

$$\omega_{ij,k} = \frac{1}{2}(u_{i,jk} - u_{j,ik}) = \frac{1}{2}(u_{i,jk} + u_{k,ij}) - \frac{1}{2}(u_{j,ik} + u_{k,ij}) = \epsilon_{ik,j} - \epsilon_{jk,i}$$

Con lo que la integral de la rotación queda:

$$\int_0^A \omega_{ij} dx_j = \omega_{ij}^o (x_j^A - x_j^o) + \int_0^A (x_j^A - x_j) (\epsilon_{ik,j} - \epsilon_{jk,i}) dx_k$$

Con este resultado, (3.16) puede escribirse como:

$$u_i^A = u_i^o + \omega_{ij}^o(x_j^A - x_j^o) + \int_0^A \left[ \epsilon_{ik} + (x_j^A - x_j)(\epsilon_{ik,j} - \epsilon_{jk,i}) \right] dx_k \quad (3.17)$$

Ahora bien, para que el campo de desplazamientos sea univaluado, la última integral no debe depender del camino de integración que elijamos en el sólido. Es decir, que cada una de las tres componentes del integrando ( $i=1,2,3$ ) debe ser una diferencial exacta. Si llamamos  $U_{ik}$  al contenido del corchete de la integral, y  $dV_i$  a las diferenciales exactas mencionadas, tenemos que  $U_{ik}dx_k = dV_i = V_{i,k}dx_k$ . Por tanto,  $U_{ik} = V_{i,k}$ . Derivando respecto de  $x_s$ :  $U_{ik,s} = V_{i,ks} = V_{i,sk} = U_{is,k}$ . Esta última ecuación:

$$U_{ik,s} = U_{is,k} \quad (3.18)$$

Es una condición necesaria y suficiente para que la integral de (3.17) no dependa del camino elegido, y por tanto para que el campo de desplazamientos sea univaluado, siempre que el dominio sea simplemente conexo (es decir siempre que el sólido no tenga agujeros interiores). Desarrollando la ecuación anterior obtenemos:

$$\epsilon_{ik,s} - \delta_{js}(\epsilon_{ik,j} - \epsilon_{jk,i}) + (x_j^A - x_j)(\epsilon_{ik,js} - \epsilon_{jk,is}) = \epsilon_{is,k} - \delta_{jk}(\epsilon_{is,j} - \epsilon_{js,i}) + (x_j^A - x_j)(\epsilon_{is,jk} - \epsilon_{js,ik})$$

Es decir:

$$\epsilon_{ik,s} - \epsilon_{ik,s} + \epsilon_{sk,i} + (x_j^A - x_j)(\epsilon_{ik,js} - \epsilon_{jk,is}) = \epsilon_{is,k} - \epsilon_{is,k} + \epsilon_{ks,i} + (x_j^A - x_j)(\epsilon_{is,jk} - \epsilon_{js,ik})$$

Los tres primeros términos de cada miembro se cancelan entre sí. El resto de la ecuación queda multiplicada por  $(x_j^A - x_j)$ . Como las cantidades  $(x_j^A - x_j)$  son arbitrarias, el factor que les multiplica debe ser cero:

$$\epsilon_{ik,js} + \epsilon_{js,ik} - \epsilon_{jk,is} - \epsilon_{is,jk} = 0 \quad (3.19)$$

Las ecuaciones anteriores se llaman ecuaciones de integrabilidad del tensor de deformaciones, o también ecuaciones de compatibilidad de Saint-Venant. Son condiciones suficientes para que exista un campo de desplazamientos univaluado asociado a  $\epsilon_{ij}$  en dominios simplemente conexos, dado que su cumplimiento implica que (3.17) sea una expresión univaluada. Sabemos que si el dominio no es simplemente conexo, la ecuación (3.18) no es suficiente para asegurar que la integral de (3.17) sea univaluada, y por tanto (3.19) tampoco será condición suficiente para que el campo de desplazamientos sea univaluado. Además de (3.18) se requiere que se satisfaga una ecuación como la siguiente para cada uno de los agujeros del sólido:

$$\oint_{\Gamma} U_{ik} dx_k = 0 \quad (3.20)$$

Donde  $\Gamma$  representa una línea cerrada arbitraria en torno al agujero considerado.

La comprobación de que las ecuaciones (3.19) son también condiciones necesarias para la existencia de un campo de desplazamientos posible, se realiza sin ninguna dificultad. Se trata de comprobar que si asumimos como cierta la existencia de  $u_i$  con las propiedades requeridas, entonces se satisface (3.19). Podemos partir de la ecuación (3.13) derivada dos veces, escrita de distintas maneras:

$$\begin{aligned}\epsilon_{ik,js} &= (u_{i,kjs} + u_{k,ij s})/2 \\ \epsilon_{js,ik} &= (u_{j,sik} + u_{s,jik})/2 \\ \epsilon_{jk,is} &= (u_{j,kis} + u_{k,jis})/2 \\ \epsilon_{is,jk} &= (u_{i,sjk} + u_{s,ijk})/2\end{aligned}$$

La operación de sumar la primera de las ecuaciones más la segunda, menos la tercera y menos la cuarta, conduce a la cancelación de los términos en derivada tercera de desplazamientos, resultando la ecuación (3.19). Por tanto (3.19) es una condición necesaria para la existencia de las funciones  $u_i$ .

La expresión (3.19) tiene cuatro subíndices libres, por lo que aparentemente representa a  $3^4=81$  ecuaciones escalares. En realidad, de estas 81 ecuaciones sólo 6 son independientes. El resto son identidades o repeticiones. Ello puede apreciarse sin más que realizar el siguiente cálculo directo. Partimos de las seis ecuaciones escalares:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

Si derivamos dos veces de todas las maneras posibles cada una de esas 6 ecuaciones, obtendremos  $6 \times 6 = 36$  ecuaciones (existen seis posibles derivadas segundas: 11, 12, 13, 22, 23, y 33). Estas ecuaciones contendrán todas las posibles derivadas terceras de las tres funciones  $u_i$ , osea que en las 36 ecuaciones figurarán  $3 \times 10 = 30$  funciones distintas del tipo  $u_{i,jkl}$  (existen 10 posibles derivadas terceras: 111, 112, 113, 122, 123, 133, 222, 223, 233, y 333). Con manipulaciones sencillas, -restando y sumando ecuaciones entre si-, podríamos eliminar las 30 funciones  $u_{i,jkl}$  utilizando 30 de las ecuaciones. Quedarían finalmente  $36 - 30 = 6$  ecuaciones que ya no contendrían más que términos del tipo  $\epsilon_{ij,ks}$ . Estas 6 ecuaciones son las ecuaciones independientes de integrabilidad contenidas en (3.19). A continuación se escriben estas seis ecuaciones en forma desarrollada:

$$\begin{aligned}\epsilon_{11,23} + \epsilon_{23,11} &= \epsilon_{12,13} + \epsilon_{13,12} & 2\epsilon_{12,12} &= \epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11} \\ \epsilon_{22,31} + \epsilon_{31,22} &= \epsilon_{23,21} + \epsilon_{21,23} & 2\epsilon_{23,23} &= \epsilon_{22,33} + \epsilon_{33,22} \\ \epsilon_{33,12} + \epsilon_{12,33} &= \epsilon_{31,32} + \epsilon_{32,31} & 2\epsilon_{31,31} &= \epsilon_{33,11} + \epsilon_{11,33}\end{aligned}\quad (3.21)$$

## Bibliografía:

FUNG, Y.C., "Foundations of solid mechanics", Prentice-Hall

PARIS, F., "Teoría de la Elasticidad", ETSII-Univ. Sevilla

SAMARTIN, A., "Curso de Elasticidad", Bellisco.

DOBLARE, M., "Teoría de la Elasticidad lineal", ETSII-Univ. Zaragoza