

Capítulo 7

Introducción a los métodos aproximados

El planteamiento analítico del problema elástico con geometría y condiciones de contorno complicadas resulta inabordable en la práctica. Por ello se han desarrollado métodos aproximados que permiten obtener soluciones suficientemente precisas de una forma asequible. El objeto de este capítulo es presentar someramente algunos de estos métodos en el ámbito de la Teoría de la Elasticidad Lineal.

7.1.- Introducción.

A la vista de lo expuesto en los capítulos 5 y 6, la resolución del problema elástico mediante enfoques analíticos solamente es abordable en casos con geometría y/o condiciones de contorno más bien sencillos. Cuando no se dan estas condiciones de simplicidad, es necesario recurrir a métodos aproximados. Es posible aplicar métodos estándar de integración aproximada de ecuaciones diferenciales a las ecuaciones diferenciales del modelo elástico. Por ejemplo es posible plantear la integración de las Ecuaciones de Navier mediante diferencias finitas. Sin embargo han alcanzado mayor aceptación, debido a su mayor eficiencia, algunos métodos basados en los teoremas integrales presentados en el capítulo 5.

Entre estos métodos, el procedimiento más extensamente utilizado es el Método de los Elementos Finitos (MEF), que será presentado brevemente más tarde. El MEF se engloba dentro de los conocidos como Métodos de Equilibrio, cuya característica común es asegurar desde el principio que el campo de desplazamientos va a tener las propiedades deseables (eligiendo una tipología adecuada), plantearlo en función de algunas incógnitas o parámetros a determinar, y obtener tantas ecuaciones como sea necesario imponiendo condiciones de equilibrio, bien sea directamente (como en el popular cálculo matricial de estructuras de barras mediante el método directo de rigidez), o bien a través de la expresión integral del Principio de los Desplazamientos Virtuales, planteando tantos estados virtuales como sea preciso. Las aproximaciones de Galerkin, del MEF, y de Rayleigh-Ritz, pueden plantearse de este modo. Las incógnitas a calcular pueden ser los parámetros indeterminados que hayamos previsto en el campo de desplazamientos que hayamos propuesto, o bien otras incógnitas que hayamos utilizado para formular el problema.

Otra posible alternativa para obtener "tantas ecuaciones como deseemos" es plantear el segundo teorema de reciprocidad para tantos estados virtuales distintos como sea preciso. Esta elección persigue que deban evaluarse solamente integrales de contorno, denominándose genéricamente "métodos de contorno" a los que gozan de esta particularidad. Una condición suficiente para que esto ocurra es que el problema no tenga cargas de volumen y que los estados virtuales se elijan también sin cargas de

volumen (métodos de Trefftz). Cuando los estados virtuales se eligen haciendo variar el punto de aplicación de una fuerza concentrada que actúa en un medio infinito (la solución de este problema se llama "solución fundamental de Kelvin"), también es posible evitar las integrales de dominio del segundo teorema de reciprocidad. Esta técnica, es la base del "Método de los Elementos de Contorno" (MEC), que ha sido desarrollado a partir de los años 70. En todo caso, los métodos de contorno permiten obtener una solución del problema en función tan solo de los valores de las variables en el contorno, reduciéndose así en uno la dimensionalidad del problema (si el sólido es tridimensional su contorno es bidimensional, y si es bidimensional el contorno es monodimensional). Este es el atractivo principal de los métodos de contorno, que son claramente idóneos cuando es suficiente conocer los valores de las variables en el contorno.

Entre algunos otros más, los métodos de Galerkin, Trefftz, Elementos Finitos y Elementos de Contorno enumerados en los párrafos precedentes pueden considerarse como particularizaciones de una técnica más general, conocida como "residuos ponderados". Resumimos seguidamente las ideas básicas de esta técnica. Sea $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x})$ la incógnita generalizada de nuestro problema (las componentes de desplazamiento en el problema elástico), y \mathbf{x} la variable independiente generalizada (las coordenadas espaciales). Se toma la ecuación o sistema de ecuaciones diferenciales que rige el problema, escrita en forma de igualdad a cero, simbólicamente $\mathbf{Z}\cdot\mathbf{u}=0$, siendo \mathbf{Z} el operador en derivadas que corresponda. Seguidamente se forma el producto de $\mathbf{Z}\cdot\mathbf{u}$ por una función $\psi(\mathbf{x})$ que elijamos arbitrariamente, llamada función de ponderación, función de peso o función proyectante, y que tendrá tantas componentes escalares como ecuaciones diferenciales tengamos. Finalmente se integra el producto en el dominio de observación:

$$\int_V (\mathbf{Z}\cdot\mathbf{u})\psi(\mathbf{x})dV \quad (7.1)$$

Está claro que si introdujésemos en \mathbf{u} una solución exacta de $\mathbf{Z}\cdot\mathbf{u}=0$, esa integral se anularía para cualquier ψ . Recíprocamente, si una cierta función \mathbf{u} anula la integral para cualquier ψ imaginable, entonces esa \mathbf{u} debe satisfacer $\mathbf{Z}\cdot\mathbf{u}=0$ (en efecto, si $\mathbf{Z}\cdot\mathbf{u}$ no fuese cero en un punto o una región, podríamos inmediatamente encontrar una ψ que hiciese no nula la integral). Precisamente desconocemos esa solución para \mathbf{u} , pero podemos "apostar" por una función \mathbf{u} que contenga parámetros indeterminados, e imponer la igualdad a cero de la integral para tantas funciones ψ distintas como necesitemos (para obtener tantas ecuaciones como incógnitas). La solución que obtengamos no será en general exacta, dado que no anulará la integral para cualquier ψ , pero esperamos que sea una aproximación razonable, ya que al menos la anulará para el conjunto de funciones ψ que hemos elegido. El nombre de esta técnica ("residuos ponderados") proviene de que al introducir en la ecuación diferencial una función $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ que no sea solución exacta, $\mathbf{Z}\cdot\mathbf{u}$ no será nulo, sino igual a un cierto error o "residuo", el cual se "pondera" con la función ψ , imponiéndose finalmente la anulación de la integral de ese "residuo ponderado".

En la aplicación del método de residuos ponderados suelen incluirse algunas manipulaciones adicionales a la integral (7.1). En particular, es habitual integrar por partes una o varias veces, y utilizar cada vez el teorema de la divergencia para

transformar integrales de divergencias en integrales de contorno. Con esto se consigue que en la integral de volumen remanente se reduzca el orden de derivación de \mathbf{u} , a cambio de que aparezcan derivadas de $\boldsymbol{\psi}$. Por una parte, esto tiende a facilitar la imposición de condiciones de contorno "naturales", dadas en función de derivadas de \mathbf{u} (como por ejemplo son las tensiones prescritas), y por otra parte reduce las exigencias en cuanto a orden de derivabilidad de nuestra función \mathbf{u} . Es llamativo que puedan obtenerse así soluciones \mathbf{u} con orden de continuidad menor que el exigido por las ecuaciones diferenciales originales ("orden de continuidad" = orden de la mayor derivada que permanece acotada en todos los puntos del dominio). Se llaman "formas débiles" a este tipo de formulaciones que posibilitan encontrar soluciones de orden de continuidad menor al exigido por las ecuaciones diferenciales originales.

Las maneras más ventajosas de integrar por partes el "residuo ponderado" de las ecuaciones de equilibrio interno ya han sido elaboradas en el capítulo 5. Las mismas son las expresiones integrales del principio de los desplazamientos virtuales y del segundo teorema de reciprocidad. En problemas físicos regidos por otras ecuaciones diferenciales pueden existir teoremas integrales análogos a los de la elasticidad. En caso contrario sería necesario encontrar una manera conveniente de integrar por partes.

La aproximación de cada componente u_i de \mathbf{u} puede ser, en principio, cualquier función de las coordenadas espaciales y de los parámetros indeterminados. Si a_1^i, \dots, a_n^i , son los n parámetros indeterminados que asociamos a u_i , la aproximación de esta componente puede escribirse simbólicamente como:

$$u_i(x_1, x_2, x_3) \approx f_i(x_1, x_2, x_3, a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i); \quad i = 1, 2, 3$$

En este tema, para las magnitudes que necesiten especificar tanto la dirección del espacio a que están asociadas como el número de orden del parámetro indeterminado a que se refieren, el superíndice indicará la dirección, mientras que el subíndice indicará el número de orden del parámetro indeterminado. Para evitar la posible falta de claridad que conllevaría la proliferación de subíndices y superíndices numéricos, en este tema se denominará a los ejes coordenados x , y , z . Con esta variante de la notación, la aproximación anterior del campo de desplazamientos será :

$$u_i(x, y, z) \approx f_i(x, y, z, a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i); \quad i = x, y, z$$

En realidad, prácticamente siempre se plantea una aproximación para \mathbf{u} lineal en los parámetros indeterminados. Con ello se persigue que las expresiones integrales conduzcan finalmente a ecuaciones lineales ordinarias en estos parámetros. Expresaremos este tipo de aproximación en la forma:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= N_1^x(x, y, z)a_1^x + N_2^x(x, y, z)a_2^x + \dots + N_n^x(x, y, z)a_n^x \\ u_y(x, y, z) &= N_1^y(x, y, z)a_1^y + N_2^y(x, y, z)a_2^y + \dots + N_n^y(x, y, z)a_n^y \\ u_z(x, y, z) &= N_1^z(x, y, z)a_1^z + N_2^z(x, y, z)a_2^z + \dots + N_n^z(x, y, z)a_n^z \end{aligned}$$

En donde las N_k^i son las funciones (elegidas según nuestro criterio) que multiplican al parámetro indeterminado k correspondiente a la componente i de \mathbf{u} . Estas funciones se llaman "funciones aproximantes" o "funciones de forma", y por supuesto, pueden ser no lineales en x, y, z . Salvo casos especiales, como podría ser el de comportamiento fuertemente anisótropo, no suele haber motivo para aproximar de forma distinta cada componente de \mathbf{u} , por lo que en lo sucesivo supondremos que se utilizan las mismas funciones para las tres componentes:

$$N_k^x = N_k^y = N_k^z = N_k; \quad \forall k$$

Con esto, la aproximación del campo de desplazamientos puede escribirse:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} u_x(\underline{\mathbf{x}}) \\ u_y(\underline{\mathbf{x}}) \\ u_z(\underline{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} N_1(\underline{\mathbf{x}}) & & & \\ & N_1(\underline{\mathbf{x}}) & & \\ & & \dots & \\ & & & N_n(\underline{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1^x \\ a_1^y \\ a_1^z \end{pmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} N_n(\underline{\mathbf{x}}) & & & \\ & N_n(\underline{\mathbf{x}}) & & \\ & & \dots & \\ & & & N_n(\underline{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n^x \\ a_n^y \\ a_n^z \end{pmatrix} = \\ &= \underline{\underline{\mathbf{N}}}_1 \underline{\underline{\mathbf{a}}}_1 + \dots + \underline{\underline{\mathbf{N}}}_n \underline{\underline{\mathbf{a}}}_n \end{aligned}$$

En donde cada N_i es una matriz de 3×3 (2×2 en problemas bidimensionales) que contiene a la función N_i en las posiciones de la diagonal y cero en las restantes. Se denota una matriz columna con un subrayado, y una cuadrada o rectangular con dos. En forma compacta podemos expresar esta aproximación como:

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\underline{\mathbf{N}}}\underline{\underline{\mathbf{a}}} \quad (7.2)$$

Siendo:

$$\underline{\underline{\mathbf{N}}} = \begin{bmatrix} N_1 & & & & & \\ & N_1 & & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & N_n & & \\ & & & & N_n & \\ & & & & & N_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{N}}}_1 & \dots & \underline{\underline{\mathbf{N}}}_n \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{\mathbf{a}}} = \begin{pmatrix} a_1^x \\ a_1^y \\ a_1^z \\ \vdots \\ a_n^x \\ a_n^y \\ a_n^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{a}}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\underline{\mathbf{a}}}_n \end{pmatrix}$$

La elección de las funciones de aproximación N_i queda al buen juicio del analista. Es evidente que el propósito debe ser introducir un conjunto de funciones capaces de aproximar suficientemente entre todas (mediante su combinación lineal) la evolución de los desplazamientos del problema particular. Aunque son posibles otras alternativas, lo más inmediato es considerar funciones definidas en todo el dominio ocupado por el sólido. La figura 7.1 muestra gráficamente algunos ejemplos posibles para el caso de un sólido bidimensional elíptico en el plano x, y . En la elección de las N_i pueden hacerse intervenir diversas consideraciones, como por ejemplo la conveniencia de que todas ellas se anulen en las zonas de desplazamiento prescrito nulo, para que estas condiciones de contorno queden satisfechas automáticamente.

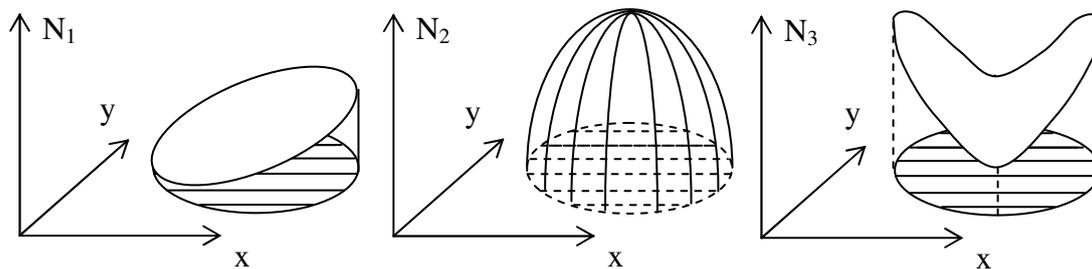


Figura 7.1.- Ejemplos de funciones de aproximación para un problema bidimensional.

En esta introducción se han presentado los fundamentos generales de las técnicas de aproximación más frecuentemente utilizadas en la actualidad, poniendo de manifiesto lo que todas ellas tienen en común: por una parte la posibilidad de ser obtenidas como particularización del método de residuos ponderados, y por otra la forma de plantear el campo de desplazamientos aproximado, como combinación lineal de "funciones de forma". En los epígrafes siguientes centraremos nuestra atención en el Método de los Elementos Finitos, que estudiaremos brevemente, aunque aprovecharemos la ocasión para presentar antes otro método de equilibrio importante por sí mismo, y en el que el anterior está basado: la aproximación de Galerkin.

No se ha hecho mención expresa de los métodos de aproximación basados en principios variacionales, que básicamente consisten en encontrar el mínimo valor de una magnitud escalar, que en el caso elástico es la energía potencial. El método de Rayleigh-Ritz mencionado en un párrafo anterior está formulado originalmente sobre la base de este principio, con la particularidad adicional de que las funciones de aproximación se eligen de forma que satisfagan las condiciones de contorno esenciales (en desplazamientos). Merece la pena apuntar que no en todos los problemas físicos es posible encontrar un principio variacional, es decir, una magnitud escalar asociada al sistema cuyo valor mínimo se alcance para la solución \mathbf{u} correcta. En cambio, siempre es posible plantear las ecuaciones diferenciales que rigen un problema, por lo que los métodos variacionales tienen menor generalidad que los de residuos ponderados. Además puede demostrarse que en los casos en que existe un principio variacional, la aproximación de Galerkin proporcionará la misma solución que el enfoque variacional. Esta es la razón por la que se ha omitido la mención a los principios variacionales en esta introducción, necesariamente esquemática. Cabe insistir en que una aproximación de Galerkin proporcionará la misma solución que una de Rayleigh-Ritz si se emplean las mismas funciones de aproximación.

Tampoco se ha hecho mención de los métodos "de compatibilidad", denominación que engloba a los enfoques de solución basados en el Principio de las Fuerzas Virtuales, o en general en imponer desde el principio el equilibrio del sistema, y más tarde la compatibilidad (continuidad, univaluación, etc.) de su campo de desplazamientos. Tales enfoques son difícilmente sistematizables, y por tanto poco apropiados para su implementación en ordenador. Este último es un defecto muy importante, ya que ha sido precisamente el espectacular desarrollo de los ordenadores lo que ha hecho aumentar la eficiencia de los métodos aproximados. Aunque estos métodos de compatibilidad no pueden competir con los métodos de equilibrio, su uso es en ocasiones adecuado para resolver "a mano" ciertos problemas. Es por ejemplo ocasionalmente conveniente su

empleo en problemas de barras que se estudian en el contexto de la Resistencia de Materiales.

7.2.- La aproximación de Galerkin aplicada al problema elástico.

El planteamiento de la ecuación integral del PDV como condición necesaria para el equilibrio, con tantos estados virtuales distintos como sea preciso, es un procedimiento característico de los Métodos de Equilibrio:

$$\int_V \varepsilon_{ij}^{\phi} \sigma_{ij} dV = \int_V \phi_i X_i dV + \int_S \phi_i \bar{X}_i dS \quad (7.3)$$

Por conveniencia posterior, expresaremos los integrandos en forma matricial. Para ello definimos las siguientes matrices columna:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}; \quad \underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix}; \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}; \quad \underline{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix}; \quad \underline{X} = \begin{pmatrix} X_x \\ X_y \\ X_z \end{pmatrix}; \text{ etc.} \quad (7.4a)$$

Y análogamente para las magnitudes asociadas al campo virtual. En problemas bidimensionales definimos similarmente:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}; \quad \underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}; \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}; \quad \underline{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix}; \quad \underline{X} = \begin{pmatrix} X_x \\ X_y \end{pmatrix}; \text{ etc.} \quad (7.4b)$$

Con estas notaciones, la ecuación (7.3) se expresa como:

$$\int_V (\underline{\varepsilon}^{\phi})^T \underline{\sigma} dV = \int_V (\underline{\phi})^T \underline{X} \cdot dV + \int_S (\underline{\phi})^T \bar{\underline{X}} \cdot dS \quad (7.5)$$

Nótese que en (7.4) la matriz columna de deformaciones incluye las deformaciones transversales γ_{xy} , etc, en lugar de los términos ε_{xy} , etc, de valor mitad, por lo que el primer integrando anterior reproduce efectivamente $\varepsilon_{ij}^{\phi} \sigma_{ij}$. En lugar de las tensiones verdaderas (desconocidas) vamos a introducir las tensiones asociadas al campo aproximado de desplazamientos. Comenzamos poniendo las tensiones en función de las deformaciones. La relación lineal entre ambas magnitudes queda recogida en una ecuación de la forma:

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{D}}(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^o) \quad (7.6)$$

Siendo ε^o la deformación que existiría para tensión nula. Este término permite recoger por ejemplo los efectos de la temperatura en la ley de comportamiento. Así, para un problema bidimensional, siendo α el coeficiente de dilatación térmica y θ el valor de la temperatura, este término sería :

$$\underline{\varepsilon}^o = \begin{pmatrix} \alpha\theta \\ \alpha\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz **D** contiene las constantes elásticas que relacionan la tensión y la deformación. Puede comprobarse que con las definiciones adoptadas en (7.4) debe ser:

Tensión Plana (TP):

$$\underline{\underline{D}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Deformación Plana (DP):

$$\underline{\underline{D}} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Problemas tridimensionales:

$$\underline{\underline{D}} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & & & \\ & & & 1-2\nu & & \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & & \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Pueden considerarse otro tipo de efectos en la ley de comportamiento, lo que da lugar a expresiones ligeramente distintas de la (7.6). Por ejemplo, si existe un campo de tensiones residuales conocido, podría emplearse una expresión como $\sigma - \sigma_o = D\varepsilon$, sin que ello suponga ninguna dificultad especial.

Expresamos ahora las deformaciones en función de los desplazamientos. Siendo la relación diferencial entre ellas de tipo lineal, podemos escribirla usando una matriz **L** de operadores diferenciales de forma que:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{u} \quad (7.7)$$

Donde:

Caso tridimensional (3D):

Caso bidimensional (2D):

$$\underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo todas estas expresiones en la ecuación del PDV dada por (7.5), ésta adopta la siguiente forma:

$$\int_V (\underline{\underline{\varepsilon}}^\varphi)^T \underline{\underline{D}} \cdot (\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{N}}) \cdot \underline{\underline{a}} \cdot dV = \int_V (\underline{\underline{\varphi}})^T \underline{\underline{X}} \cdot dV + \int_S (\underline{\underline{\varphi}})^T \underline{\underline{X}} \cdot dS + \int_V (\underline{\underline{\varepsilon}}^\varphi)^T \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^\circ \cdot dV \quad (7.8)$$

Nótese que $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{L}}(\underline{\underline{N}}\underline{\underline{a}}) = (\underline{\underline{L}}\underline{\underline{N}})\underline{\underline{a}}$, ya que las derivaciones del operador $\underline{\underline{L}}$ no afectan al conjunto de parámetros contenidos en $\underline{\underline{a}}$, los cuales no dependen de las coordenadas espaciales (aunque desconozcamos su valor por el momento).

Para proseguir, debemos elegir qué tipo de campos virtuales utilizaremos en la expresión (7.8). Distintas elecciones dan lugar a distintos métodos de resolución. En lugar de plantear "muchos" campos virtuales particulares, elegiremos plantear un solo campo virtual φ_i , pero que sea combinación lineal arbitraria de "muchos" campos virtuales particulares, lo que conceptualmente es equivalente. *Construimos este campo virtual mediante combinación lineal arbitraria de las mismas funciones de forma N_k empleadas para aproximar el campo real de desplazamientos.* Los coeficientes de esta combinación lineal arbitraria serán coeficientes arbitrarios (que pueden tomar cualquier valor a nuestro antojo), y que llamaremos $(a^i_k)^\varphi$, donde los índices i y k juegan un papel análogo a los de a^i_k ($i=x,y,z$) utilizados en la aproximación del campo real. La elección se concreta así en:

$$\underline{\underline{\varphi}} = \underline{\underline{N}} \cdot \underline{\underline{a}}^\varphi \quad (7.9)$$

Esta elección es precisamente la que distingue a la aproximación de Galerkin de otros métodos, y es la mejor en muchos sentidos. Indicamos sin demostración algunas de sus propiedades: 1º, generalmente (siempre, en problemas elásticos) implicará el manejo de matrices simétricas; 2º, conducirá a fórmulas finales idénticas, y por tanto a los mismos resultados, que un enfoque variacional equivalente, si éste puede formularse

(siempre se puede en elasticidad); 3º, en problemas elásticos, la aproximación obtenida será la mejor posible con las funciones que hayamos usado, en el sentido de mínimos cuadrados ponderados de las deformaciones. Desde un punto de vista conceptual puede argumentarse además lo siguiente: la relación (7.3) es condición suficiente para asegurar el equilibrio si se satisface para *cualquier* campo virtual concebible. No podemos incluir todos en la formulación, pero la elección de Galerkin contiene a todos los que podemos construir con la aproximación de desplazamientos utilizada. La elección equivale a considerar como concebibles sólo a aquellos campos de desplazamiento que sean representables con el modelo de aproximación. Pensando de esta manera, la elección (7.9) resulta natural y coherente en el sentido de que utiliza como estados virtuales todas las formas de desplazamiento que hemos considerado concebibles.

La ecuación (7.8) del PDV con el campo virtual dado por (7.9) adquiere la forma:

$$\begin{aligned} & \int_V (\underline{\mathbf{a}}^\varphi)^T (\underline{\mathbf{L}}\underline{\mathbf{N}})^T \underline{\mathbf{D}}(\underline{\mathbf{L}}\underline{\mathbf{N}}) \cdot \underline{\mathbf{a}} \cdot dV = \\ & = \int_V (\underline{\mathbf{a}}^\varphi)^T \underline{\mathbf{N}}^T \underline{\mathbf{X}} \cdot dV + \int_S (\underline{\mathbf{a}}^\varphi)^T \underline{\mathbf{N}}^T \underline{\mathbf{X}} \cdot dS + \int_V (\underline{\mathbf{a}}^\varphi)^T (\underline{\mathbf{L}}\underline{\mathbf{N}})^T \cdot \underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^\circ dV \end{aligned} \quad (7.10)$$

En la ecuación anterior, las matrices $\underline{\mathbf{a}}$ y $\underline{\mathbf{a}}^\varphi$ contienen parámetros indeterminados y coeficientes arbitrarios respectivamente, pero no dependen de las coordenadas espaciales, por lo que pueden salir de las integrales:

$$\begin{aligned} & (\underline{\mathbf{a}}^\varphi)^T \left[\int_V (\underline{\mathbf{L}} \cdot \underline{\mathbf{N}})^T \cdot \underline{\mathbf{D}} \cdot (\underline{\mathbf{L}} \cdot \underline{\mathbf{N}}) \cdot dV \right] \cdot \underline{\mathbf{a}} = \\ & = (\underline{\mathbf{a}}^\varphi)^T \left[\int_V \underline{\mathbf{N}}^T \underline{\mathbf{X}} \cdot dV \right] + (\underline{\mathbf{a}}^\varphi)^T \left[\int_S \underline{\mathbf{N}}^T \underline{\mathbf{X}} \cdot dS \right] + (\underline{\mathbf{a}}^\varphi)^T \int_V (\underline{\mathbf{L}} \cdot \underline{\mathbf{N}})^T \cdot \underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^\circ dV \end{aligned}$$

Pensemos en la ecuación anterior en forma de igualdad a cero con todos los términos en un lado de la igualdad, y con el factor común $(\underline{\mathbf{a}}^\varphi)^T$ extraído. Si esta ecuación se satisficiera sólo para algún o algunos $\underline{\mathbf{a}}^\varphi$ particulares, no podríamos asegurar que su cofactor debiera anularse. Pero como debe cumplirse para cualquier conjunto arbitrario de parámetros $\underline{\mathbf{a}}^\varphi$, sí que podemos asegurarlo. Por tanto debe ser:

$$\begin{aligned} & \left[\int_V (\underline{\mathbf{L}} \cdot \underline{\mathbf{N}})^T \cdot \underline{\mathbf{D}} \cdot (\underline{\mathbf{L}} \cdot \underline{\mathbf{N}}) \cdot dV \right] \cdot \underline{\mathbf{a}} = \\ & = \int_V \underline{\mathbf{N}}^T \underline{\mathbf{X}} \cdot dV + \int_S \underline{\mathbf{N}}^T \underline{\mathbf{X}} \cdot dS + \int_V (\underline{\mathbf{L}} \cdot \underline{\mathbf{N}})^T \cdot \underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^\circ dV \end{aligned} \quad (7.11)$$

Que tiene la siguiente estructura, típica de las aproximaciones de problemas lineales:

$$\underline{\mathbf{K}} \cdot \underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{f}} \quad (7.12a)$$

Siendo:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{K}}} &= \int_V (\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}})^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot (\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}) \cdot dV ; \\ \underline{\underline{\mathbf{f}}} &= \int_V \underline{\underline{\mathbf{N}}}^T \underline{\underline{\mathbf{X}}} \cdot dV + \int_S \underline{\underline{\mathbf{N}}}^T \overline{\underline{\underline{\mathbf{X}}}} \cdot dS + \int_V (\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}})^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^o dV\end{aligned}\quad (7.12b)$$

Hay que destacar algunas reflexiones importantes acerca del sistema de ecuaciones lineales ordinarias (7.12):

1) El vector de cargas en el contorno, $\overline{\underline{\underline{\mathbf{X}}}}$, suele ser a priori desconocido en una parte del contorno del sólido (aquella parte en la que los desplazamientos están prescritos). Esto supone que los términos de $\underline{\underline{\mathbf{f}}}$ no serán en general calculables explícitamente al principio del problema. Podemos pensar que *las propias integrales* de contorno de varias (o todas) las N_i que aparecen en $\underline{\underline{\mathbf{f}}}$ son incógnitas adicionales del problema, que deberemos calcular. En resumen, algunos o todos los términos de $\underline{\underline{\mathbf{f}}}$ pueden contener incógnitas. Es posible evitarlo en problemas con desplazamientos prescritos nulos, eligiendo funciones de aproximación que sean nulas en esas zonas de desplazamiento prescrito. Pero si tenemos incógnitas en $\underline{\underline{\mathbf{f}}}$, necesitaremos ecuaciones adicionales a las (7.12). Estas ecuaciones se obtienen de aproximar las condiciones de contorno en desplazamientos. Por otra parte, tanto el vector de fuerzas de volumen, $\underline{\underline{\mathbf{X}}}$, como la "deformación de tensión nula" $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^o$, suelen ser funciones explícitas conocidas de las coordenadas espaciales, por lo que el cálculo de las integrales correspondientes no tiene más problema que el de su evaluación..

2) La matriz $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ del sistema, que suele llamarse "matriz de rigidez", es cuadrada. Se aprecia fácilmente que en problemas tridimensionales, la misma es de dimensiones $(3n \times 3n)$, mientras que en problemas bidimensionales es $(2n \times 2n)$, siendo n el número de funciones de aproximación (N_i , $i=1..n$) utilizadas para cada componente de desplazamiento. Por tanto, el sistema lineal de ecuaciones tiene tantas ecuaciones como parámetros a_k^i . Por las propiedades elementales de los productos de matrices, también se aprecia que $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ es una matriz simétrica (ya que $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ lo es, y $\underline{\underline{\mathbf{M}}}^T \underline{\underline{\mathbf{D}}} \underline{\underline{\mathbf{M}}}$ lo será también, cualquiera que sea la matriz $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$).

3) La matriz $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ será en general singular (no tendrá inversa). Por ejemplo, puede apreciarse que debe serlo en problemas con todas las condiciones de contorno dadas en tensiones, en los que $\underline{\underline{\mathbf{f}}}$ es calculable a priori: no cabe esperar calcular $\underline{\underline{\mathbf{a}}}$ como $\underline{\underline{\mathbf{a}}} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{f}}}$, porque ello dejaría determinado el campo de desplazamientos, y sabemos que no puede estarlo hasta que no impongamos algunas condiciones de contorno en desplazamientos, lo que no hemos hecho hasta el momento. Sin embargo, si el problema tiene condiciones de contorno homogéneas en cantidad suficiente para evitar movimientos de sólido rígido, y se utilizan funciones de aproximación que satisfacen automáticamente esas condiciones, no existe ya motivo para que $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ sea singular.

4) Habitualmente resulta conveniente pensar en la matriz $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$, como formada por submatrices de dimensión 3×3 , (2×2 en problemas bidimensionales), y en $\underline{\underline{\mathbf{a}}}$ (y $\underline{\underline{\mathbf{f}}}$) como una matriz columna formada por submatrices de 3×1 (o bien 2×1), es decir:

$$\sum_{j=1}^n \underline{\underline{K}}_{ij} \underline{a}_j = \underline{f}_i ; \quad (i=1\dots n) \quad (7.13)$$

Siendo:

$$\underline{\underline{K}}_{ij} = \int_V \left(\underline{L} \cdot \underline{N}_i \right)^T \cdot \underline{D} \cdot \left(\underline{L} \cdot \underline{N}_j \right) \cdot dV ; \quad \underline{f}_i = \int_V \underline{N}_i^T \underline{X} \cdot dV + \int_S \underline{N}_i^T \underline{\bar{X}} \cdot dS + \int_V \left(\underline{L} \cdot \underline{N}_i \right)^T \underline{D} \underline{\varepsilon}_0 \cdot dV$$

El que la matriz $\underline{\underline{K}}$ del sistema sea simétrica, implica que sus submatrices deben cumplir:

$$\underline{\underline{K}}_{ij} = \left(\underline{\underline{K}}_{ji} \right)^T ; \quad \forall i, j$$

5) Insistiremos en que para resolver el problema, aún bebemos imponer las condiciones de contorno en desplazamientos, salvo que todas ellas sean homogéneas (tipo $u_i=0$) y las funciones de aproximación elegidas las satisfagan. La imposición de estas condiciones de contorno de forma aproximada debe proporcionarnos tantas ecuaciones como incógnitas tengamos en \underline{f} . Esto ocurrirá automáticamente si ajustamos por mínimos cuadrados los desplazamientos prescritos. Puede realizarse también el ajuste aproximado mediante cualquier otra técnica, como por ejemplo haciendo que el desplazamiento tenga exactamente el valor prescrito en un número finito de puntos.

Para finalizar este epígrafe, destaquemos que la única fuente de error del procedimiento de aproximación descrito es que, en la mayoría de los casos, una combinación lineal de las funciones N_i propuestas no será capaz de describir de manera exacta la solución de desplazamientos del problema. El que la solución de desplazamientos sea sólo aproximada conlleva el que las condiciones de contorno se satisfarán solo aproximadamente. En particular, las condiciones de contorno en desplazamientos, las cuales debemos imponer en el proceso de resolución, no pueden satisfacerse más que de forma aproximada, mediante técnicas de ajuste como se indicó en el párrafo anterior. En general, las condiciones de contorno en tensiones tampoco coincidirán exactamente con las tensiones derivadas del campo de desplazamientos calculado, pese a que hayamos introducido la tensión de contorno correcta para el cálculo de \underline{f} . En todo caso, si "acertáramos" a elegir un conjunto de funciones capaces de ajustarse a la solución exacta, hay garantía de que obtendríamos dicha solución exacta. Es casi seguro que no "acertemos", pero tenemos al menos garantía de obtener la (en cierto sentido) mejor aproximación posible basada en las funciones propuestas.

Un ejemplo sencillo.

Consideremos el sólido bidimensional de la figura 7.2, cuya forma es de triángulo rectángulo con base y altura iguales, de longitud L [m], que está sometido a una distribución uniforme de carga p [N/m²] en el contorno $x=0$, y que tiene el desplazamiento totalmente impedido en los puntos del contorno $y=0$, según se indica. El

material tiene peso específico ρ [N/m^3], Módulo de Young E [N/m^2], y Coeficiente de Poisson nulo. El espesor del sólido en la dirección z es b [m]. Utilizaremos las dos funciones de aproximación siguientes para realizar la aproximación de Galerkin: $N_1=x$, $N_2=y$. Con sólo dos funciones, que además no están elegidas especialmente para adaptarse al problema, no cabe esperar que la aproximación final sea buena, pero el procedimiento quedará ilustrado igualmente, y las operaciones resultarán más sencillas.

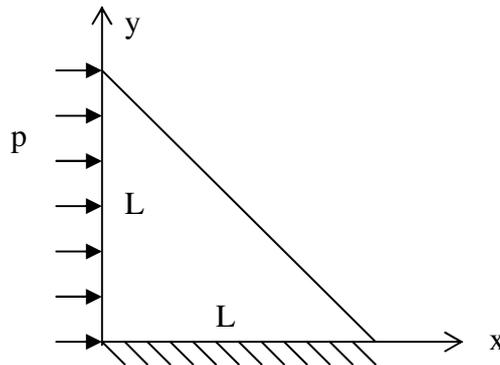


Figura 7.2- Sólido triangular con carga uniforme en una de sus caras.

La aproximación del campo de desplazamientos con las funciones consideradas es:

$$\begin{aligned} u_x &= N_1 a_1^x + N_2 a_2^x = x a_1^x + y a_2^x \\ u_y &= N_1 a_1^y + N_2 a_2^y = x a_1^y + y a_2^y \end{aligned}$$

En primer lugar, calcularemos la matriz de rigidez de la aproximación. Es cómodo realizar el cálculo de sus submatrices:

$$\underline{\underline{K}}_{ij} = \int_V (\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{N}}_i)^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot (\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{N}}_j) \cdot dV$$

Al ser nulo el coeficiente de Poisson, la ley de comportamiento, y por tanto la matriz $\underline{\underline{D}}$, adopta la misma forma tanto en Tensión Plana como en Deformación Plana, y la solución del problema (tanto la "exacta" como la obtenida mediante aproximación) es la misma para ambas situaciones. La expresión de $\underline{\underline{D}}$ para $\nu=0$ es:

$$\underline{\underline{D}} = E \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Los términos entre paréntesis en los integrandos de $\underline{\underline{K}}_{ij}$ se calculan fácilmente:

$$\underline{\underline{\mathbf{L} \cdot \mathbf{N}_1}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \underline{\underline{\mathbf{L} \cdot \mathbf{N}_2}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nótese que por ser en este caso lineales las funciones de aproximación, sus derivadas son constantes, y por tanto las matrices $\underline{\underline{\mathbf{L} \cdot \mathbf{N}_i}}$ también son constantes que podrán salir de las integrales. Esto simplifica la labor de integración hasta el punto de que sólo es preciso calcular el área del dominio triangular. Tenemos por tanto:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}_{11}}} = \int_V \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{E} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dx dy dz = \frac{\mathbf{E}L^2}{2} \mathbf{b} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}_{12}}} = \int_V \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{E} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} dx dy dz = \frac{\mathbf{E}L^2}{2} \mathbf{b} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}_{22}}} = \int_V \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{E} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} dx dy dz = \frac{\mathbf{E}L^2}{2} \mathbf{b} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y por simetría de la matriz $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}_{21}}} = (\underline{\underline{\mathbf{K}_{12}}})^T = \frac{\mathbf{E}L^2}{2} \mathbf{b} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En segundo lugar calcularemos el término de cargas $\underline{\underline{\mathbf{f}}}$, que depende de las fuerzas por unidad de volumen (en nuestro caso sólo el peso, ya que no hay temperatura), y de las fuerzas aplicadas en el contorno del sólido. Nuevamente procederemos calculando sus submatrices $\underline{\underline{\mathbf{f}_i}}$:

$$\underline{\underline{\mathbf{f}_i}} = \int_V \underline{\underline{\mathbf{N}_i^T}} \underline{\underline{\mathbf{X}}} \cdot dV + \int_S \underline{\underline{\mathbf{N}_i^T}} \underline{\underline{\mathbf{X}}} \cdot dS$$

Empezamos con las integrales de volumen, cuya complicación se reduce a ser evaluadas:

$$\int_V \underline{\underline{\mathbf{N}_1^T}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{X}}} \cdot dV = \mathbf{b} \int_0^L \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \end{pmatrix} (L-x) dx = -\rho \mathbf{b} L^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

$$\int_V \underline{\underline{\mathbf{N}_2^T}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{X}}} \cdot dV = \mathbf{b} \int_0^L \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \end{pmatrix} (L-y) dy = -\rho \mathbf{b} L^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora las integrales de contorno. La función $N_1 (=x)$ se anula en la cara vertical, mientras que \bar{X} es nula en la oblicua. En consecuencia, sólo la cara horizontal tiene aportación a la integral de contorno que contiene a N_1 . En esta cara la tensión de contorno es desconocida, por tanto:

$$\int_S \underline{N}_1^T \cdot \bar{X} \cdot dS = b \int_0^L \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{pmatrix}_{y=0} dx = b \begin{pmatrix} t_1^x \\ t_1^y \end{pmatrix}$$

Hemos llamado t_1^x, t_1^y a las cantidades (no son funciones) resultantes de la integración, y consideraremos estas cantidades como incógnitas adicionales del problema. La integral de contorno que contiene a $N_2 (=y)$ solo contendrá la aportación del contorno vertical, ya que en el oblicuo la tensión es nula, y en el horizontal es nula N_2 .

$$\int_S \underline{N}_2^T \cdot \bar{X} \cdot dS = b \int_0^L \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}_{x_1=0} dy = pbL^2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Apréciase comparativamente la ventaja de usar funciones de aproximación que satisfagan las condiciones de contorno homogéneas en desplazamientos: las tensiones desconocidas de la cara inferior se multiplican por el valor nulo de la función N_2 , y el resultado es nulo en todo caso, no apareciendo incógnitas asociadas a esta función en el término de cargas

Estamos ya en condiciones de plantear las ecuaciones (7.12) para nuestro ejemplo. Apréciase que el espesor b del sólido no influirá en el cálculo de las incógnitas:

$$\frac{EbL^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^x \\ a_1^y \\ a_2^x \\ a_2^y \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} t_1^x \\ -\frac{\rho L^3}{6} + t_1^y \\ \frac{pL^2}{2} \\ -\frac{\rho L^3}{6} \end{pmatrix}$$

Para poder calcular las incógnitas, debemos imponer las condiciones de contorno en desplazamientos. Las restricciones al desplazamiento de este problema consisten en que todos los puntos de la cara horizontal no se muevan. En este caso es posible hacer que se cumpla exactamente esta condición, ya que imponiéndola en el campo aproximado de desplazamientos tenemos (nótese que $N_2=0$ en $y=0$):

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}_{y=0} = \underline{N}_1 \begin{pmatrix} a_1^x \\ a_1^y \end{pmatrix} + \underline{N}_2 \begin{pmatrix} a_2^x \\ a_2^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^x \\ a_1^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_1^x = 0 \\ a_1^y = 0 \end{matrix}$$

Es decir, la condición se satisface exactamente si los parámetros que multiplican a la función N_1 son cero. Desgraciadamente, esto supone que dicha función no figurará finalmente en el campo de desplazamientos, por lo que todo el trabajo que hemos realizado con ella es baldío. En todo caso, llevamos este resultado al sistema de ecuaciones general, y las dos últimas ecuaciones nos permiten conocer los parámetros asociados a N_2 :

$$\frac{EbL^2}{2} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2^x \\ a_2^y \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} \frac{\rho L^2}{2} \\ -\frac{\rho L^3}{6} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a_2^x &= \frac{2p}{E} \\ a_2^y &= -\frac{\rho L}{3E} \end{aligned}$$

Con lo que la aproximación de desplazamientos obtenida para el problema de la figura 7.2 es:

$$u_x = \frac{2p}{E} y ; u_y = -\frac{\rho L}{3E} y$$

Antes de dar por terminado este sencillo ejemplo, realizaremos unas breves reflexiones finales a modo de recapitulación.

-Según hemos visto, el cumplimiento de las condiciones de contorno en desplazamientos, requiere que $a_{x_1}=a_{y_1}=0$, lo que implica que la función de forma N_1 no aporta nada al campo de movimientos aproximado del problema. Podríamos haber considerado en primer lugar las restricciones de movimiento del problema dado, y no realizar ningún cálculo con N_1 . No se ha hecho así porque raramente es conveniente seguir ese orden en casos más realistas.

-Se ha mostrado porqué es interesante elegir las funciones de aproximación de forma que cumplan las condiciones de contorno en desplazamientos: se evita la aparición de incógnitas en \mathbf{f} . El Método de Rayleigh-Ritz, basado en un enfoque variacional que proporciona los mismos resultados que la aproximación de Galerkin, propone de modo general la utilización de este tipo de funciones de aproximación.

-En este caso, hemos podido satisfacer exactamente las condiciones de contorno en desplazamientos, con la fortuna añadida de que ha sido posible resolver el sistema de ecuaciones sin tener que calcular las incógnitas de \mathbf{f} . Debe entenderse que todo ello ha ocurrido excepcionalmente en este problema particular.

-El sistema lineal de ecuaciones $\mathbf{Ka}=\mathbf{f}$ incluye en este caso cuatro ecuaciones con seis incógnitas, los cuatro parámetros de la aproximación del campo de movimientos, y las dos cantidades t_{x_1} , t_{y_1} , resultantes de la integración de las tensiones del contorno $y=0$. Para resolver dicho sistema, en general hubiésemos necesitado dos ecuaciones más, que hubiésemos obtenido aproximando las condiciones de contorno en desplazamientos. Ilustraremos seguidamente como se hubiese realizado esto último mediante el método de mínimos cuadrados. Se comienza escribiendo la expresión del error que se comete para cada componente de desplazamiento, que es la diferencia entre el valor prescrito y el obtenido de la aproximación. En este caso, el valor prescrito es cero, así que el error es el propio valor de la componente de desplazamiento:

$$\text{Error}_x = u_x - 0 = N_1 \cdot a_1^x + N_2 \cdot a_2^x = x \cdot a_1^x + y \cdot a_2^x$$

$$\text{Error}_y = u_y - 0 = N_1 \cdot a_1^y + N_2 \cdot a_2^y = x \cdot a_1^y + y \cdot a_2^y$$

Seguidamente se impone que la integral de cada error elevado al cuadrado tome un valor mínimo, es decir se minimiza respecto de los parámetros a_k^i , manteniendo $y=0$, la integral del error cuadrático de cada componente. Comenzamos por u_x :

$$\frac{\partial}{\partial a_1^x} \int_0^L (u_x)^2 dx = 0 \Rightarrow 2 \int_0^L [(N_1 a_1^x + N_2 a_2^x) N_1]_{y=0} dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a_2^x} \int_0^L (u_x)^2 dx = 0 \Rightarrow 2 \int_0^L [(N_1 a_1^x + N_2 a_2^x) N_2]_{y=0} dx = 0 \quad (\text{identidad})$$

Procedemos análogamente para u_y :

$$\frac{\partial}{\partial a_1^y} \int_0^L (u_y)^2 dx = 0 \Rightarrow 2 \int_0^L [(N_1 a_1^y + N_2 a_2^y) N_1]_{y=0} dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a_2^y} \int_0^L (u_y)^2 dx = 0 \Rightarrow 2 \int_0^L [(N_1 a_1^y + N_2 a_2^y) N_2]_{y=0} dx = 0 \quad (\text{identidad})$$

La última ecuación de cada pareja resulta en este caso una identidad, porque N_2 es idénticamente nulo en $y=0$. Las restantes dos ecuaciones son las que necesitábamos para completar, junto con las cuatro de $\mathbf{Ka}=\mathbf{f}$, un total de seis ecuaciones. En este caso, las dos ecuaciones ofrecen por sí mismas los valores de dos de los parámetros:

$$\int_0^L 2(x)^2 a_1^x dx = \frac{2L^3}{3} a_1^x = 0 \Rightarrow a_1^x = 0$$

$$\int_0^L 2(x)^2 a_1^y dx = \frac{2L^3}{3} a_1^y = 0 \Rightarrow a_1^y = 0$$

Lo que ya se obtuvo por apreciación directa al resolver el problema. Lo obtenido se corresponde con el ajuste exacto de las condiciones de contorno (cuando el ajuste exacto es posible, mínimos cuadrados dará ese ajuste exacto). El ajuste ha proporcionado dos ecuaciones adicionales, que junto con las cuatro de la aproximación de Galerkin permiten calcular las seis incógnitas. En un caso más general, en el que ninguna de las dos funciones de aproximación satisficiera las condiciones de contorno en desplazamientos, habríamos tenido una incógnita (escalar) en cada término de \mathbf{f} , con un total de cuatro incógnitas adicionales. En ese caso, ninguna de las cuatro ecuaciones de mínimos cuadrados habría resultado identidad, y tendríamos un total de ocho ecuaciones útiles para determinar las ocho incógnitas $a_k^i, t_k^i, k=1,2; i=x,y$.

Para finalizar, insistiremos en que la aproximación realizada es realmente muy mala, lo que no es de extrañar: sólo hemos empleado dos funciones, y una de ellas ha sido descartada en el proceso. El campo de movimientos aproximado depende solamente de la coordenada y , de tal forma que el campo de deformaciones y tensiones resulta:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{L} \cdot \underline{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2P}{E}y \\ -\frac{\rho L}{3E}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\rho L}{3E} \\ \frac{2p}{E} \end{pmatrix}; \quad \underline{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{\varepsilon} = E \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\rho L}{3E} \\ \frac{2p}{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\rho L}{3} \\ p \end{pmatrix}$$

El estado de tensiones ni siquiera refleja la existencia de una componente σ_{xx} , que evidentemente existe (carga en el contorno $x=0$). Además, resultan tensiones no nulas en la cara oblicua descargada. Los desplazamientos presentan en cambio una mejor apariencia, como muestra la figura 7.3, ya que el vértice superior se mueve hacia la derecha y hacia abajo, como cabe esperar a la vista de la carga horizontal y de la acción del peso propio.

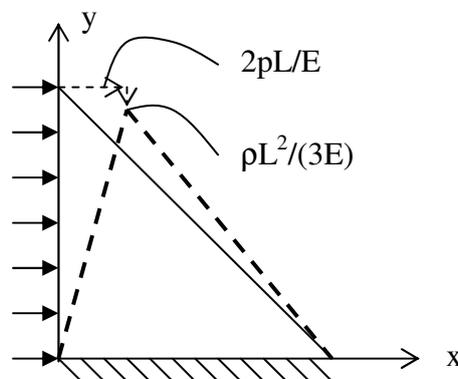


Figura 7.3.- Desplazamientos calculados mediante la aproximación.

Es habitual que, como en este ejemplo, los métodos aproximados ofrezcan resultados más precisos en desplazamientos que en tensiones, las cuales parecen ser inherentemente más difíciles de aproximar por el hecho de ser derivadas de la magnitud fundamental que se aproxima. Se puede argumentar como explicación que si la función se aproximó con orden p , las derivadas primeras se aproximan con orden $p-1$. Pero lo cierto es que se observa un comportamiento similar (aunque quizá menos acusado) en métodos en los que se pueden realizar aproximaciones independientes y del mismo orden para tensiones y desplazamientos, como el Método de los Elementos de Contorno.

7.3.- Formulación básica del Método de los Elementos Finitos (MEF).

El Método de los Elementos Finitos no es más que una aproximación de Galerkin en la que se aplican unas pocas ideas muy sencillas a la hora de elegir las funciones de aproximación. A pesar de su sencillez, dichas ideas incrementan espectacularmente la versatilidad del método para acomodarse a geometrías y condiciones de contorno complicadas. Otras ventajas que se irán apreciando son el claro sentido físico que pasan a tener las incógnitas del problema, así como ventajas de tipo numérico (manejo de matrices casi vacías, entre otras). Pero quizá la mayor de todas radica en que la elección de las funciones de aproximación se sistematiza enormemente, reduciendo la

intervención del analista a una división inicial del dominio en celdas, pudiendo dejarse lo demás para ser ejecutado por una implementación comercial en ordenador. Este factor resultó decisivo en la expansión y popularización del método. Las particularidades que distinguen al MEF de una aproximación general de Galerkin son las siguientes:

a) El campo de desplazamientos (real y virtual) se aproxima mediante funciones N_i de pequeño soporte. Se denomina así, a las funciones que son no nulas únicamente en una pequeña región del dominio.

Una función complicada puede ser aproximada excelentemente por funciones muy sencillas si la aproximación se realiza por trozos pequeños. O lo que es lo mismo, podemos conseguir buena aproximación de u_k ($k=x,y,z$) con funciones N_i muy sencillas si sus soportes son pequeños. Procediendo así, nos encontramos además con que cada integral que contenga a la función de aproximación N_i sólo debe evaluarse sobre su soporte, es decir, sobre la pequeña porción del dominio donde la función N_i no es nula, y el integrando será sencillo. Esto unido a que la geometría del soporte puede elegirse también sencilla, mejora la precisión de la integración, que se realiza numéricamente.

De forma similar, la integral que expresa a K_{ij} , que contiene derivadas de N_i y N_j , únicamente debe evaluarse en el soporte común (la intersección de los soportes de N_i y N_j). Al ser pequeños los soportes, es evidente que dicho soporte común será nulo en muchos casos. Esto implica que muchas submatrices K_{ij} serán nulas, lo que puede detectarse fácilmente a priori, con un ahorro de cálculo muy importante.

Por último, en las condiciones de contorno en desplazamientos, que según vimos en el epígrafe anterior deben imponerse de forma aproximada, intervendrán sólo las funciones de forma N_i que sean no nulas en el contorno. Por tanto, al ajustar las condiciones de contorno en desplazamientos manejaremos solamente algunas de las funciones.

b) Se divide el dominio en celdas (pensemos que triangulares, para 2D). Cada soporte será el entorno de celdas que comparten un vértice de las mismas. Llamamos "elemento" a cada una de las celdas, y "nodo" a cada vértice. De esta manera, cada función de aproximación tendrá como soporte el conjunto de elementos que comparten un nodo. Lo anterior asocia una función de forma N_i a cada nodo i .

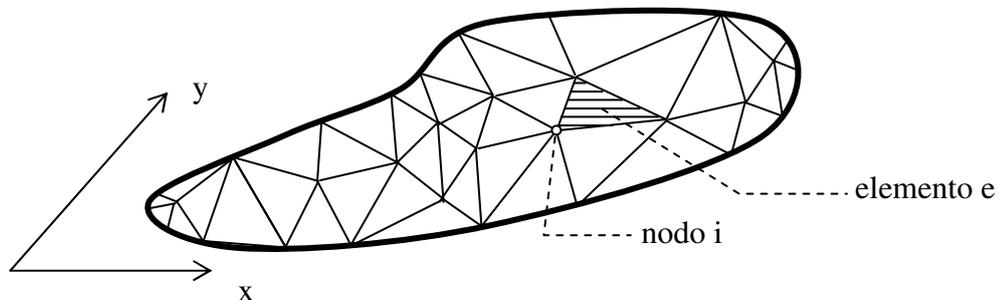


Figura 7.4.- Discretización del dominio mediante elementos triangulares.

Esta manera de elegir los soportes de las funciones admite un tratamiento sistemático por ordenador una vez que se ha establecido la "malla" de elementos. Ya casi todos los

programas comerciales tienen también ayudas para generar la malla a partir de unos pocos parámetros (número de nodos en cada porción del contorno, previamente definido como entidad geométrica, por ejemplo). La figura 7.4 muestra una posible malla de elementos triangulares para un problema bidimensional. Tal como ocurre en la figura, es habitual que la geometría del contorno no pueda ser descrita exactamente por el tipo de elementos que se usen (sea cual sea éste), lo que supone una nueva fuente de inexactitud. Sin embargo, podemos ajustarnos a dicha geometría tanto como queramos aumentando el número de elementos, al coste de aumentar el volumen de cálculos.

c) Cada función de aproximación N_i vale la unidad en su nodo, y cero en los demás. Por supuesto vale cero en los nodos alejados del nodo i , ya que caen fuera del soporte de N_i . Lo que establece esta condición es que N_i valga cero también en los nodos vecinos al nodo i , los cuales están en el borde del soporte de N_i . En problemas bidimensionales, una representación del valor de N_i en la tercera dimensión, es una pirámide cuya base está formada por los elementos que comparten el nodo i , como indica la figura 7.5.

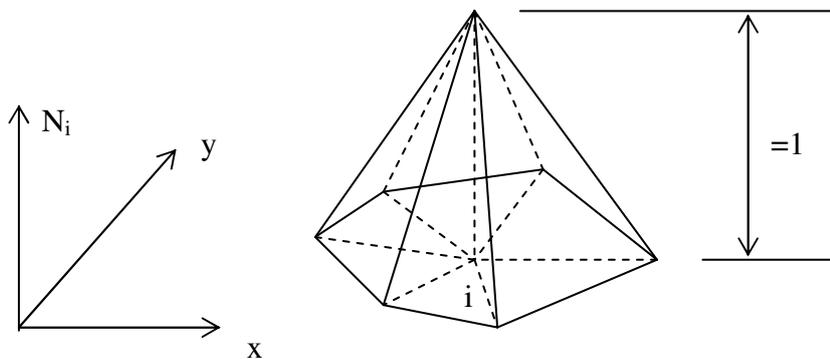


Figura 7.5.- Función de aproximación N_i asociada al nodo i .

Esta elección hace que los $3N$ parámetros indeterminados de la aproximación tengan un claro significado físico, ya que al particularizar el campo de desplazamientos aproximado en las coordenadas del nodo i , resultará que sólo N_i es distinto de cero, y vale la unidad. Véase:

$$\underline{u}(x, y, z) = [\underline{I} \cdot N_1, \dots, \underline{I} \cdot N_i, \dots, \underline{I} \cdot N_n] \cdot \underline{a}$$

$$\text{En las coordenadas del nodo } i \Rightarrow \underline{u}(\text{nodo } i) = [\underline{0}, \dots, \underline{1}, \dots, \underline{0}] \cdot \underline{a} = \begin{pmatrix} a_i^x \\ a_i^y \\ a_i^z \end{pmatrix}$$

La igualdad anterior expresa que los parámetros que multiplican a la función de aproximación N_i son precisamente las componentes de desplazamiento del nodo i del sólido, siendo éste el claro significado físico al que se ha hecho referencia.

También los términos de \mathbf{f} pasan a tener un significado físico. Para verlo, considérese una fuerza concentrada \mathbf{F} , que actúa sobre el nodo i . Recordemos que una fuerza concentrada se interpreta como una distribución de tensiones "muy intensa", pero que actúa en un entorno "muy pequeño" del punto, de forma que su resultante tiene las componentes de la fuerza concentrada. Llamando $\text{Ent}(\text{nodo } i)$ a ese entorno

arbitrariamente pequeño, y pensando por ejemplo que la carga es de contorno (si es de dominio el razonamiento es idéntico), tenemos:

$$\int_{\text{Ent}(\text{nodo } i)} \bar{X} dS = \underline{F}$$

La aportación de esta fuerza concentrada al término de cargas \mathbf{f} se calcula del modo habitual, integrando en la región del dominio donde el integrando no se anula, es decir, en el entorno del nodo. En este dominio de integración, arbitrariamente pequeño, las funciones de forma tienen valores constantes: las de todos los nodos valen cero, salvo la del nodo i , que vale uno. Por tanto solamente habrá aportación a la submatriz \mathbf{f}_i correspondiente al nodo i :

$$\text{Aportación a } \underline{f}_i = \int_S \underline{N}_i \bar{X} dS = \int_{\text{Ent}(\text{nodo } i)} \underline{N}_i \bar{X} dS = \underline{N}_i(\text{nodo } i) \int_{\text{Ent}(\text{nodo } i)} \bar{X} dS = \underline{I} \int_{\text{Ent}(\text{nodo } i)} \bar{X} dS = \underline{F} = \begin{pmatrix} F^x \\ F^y \\ F^z \end{pmatrix}$$

Que son las componentes de la fuerza aplicada en dicho nodo. Por tanto, para incluir el efecto de una fuerza concentrada que actúa sobre el nodo i , sólo hay que llevar a las tres posiciones de \mathbf{f}_i las tres componentes de la fuerza. Esta particularidad es interesante por sí misma para tratar las fuerzas concentradas llegado el caso, pero tiene además una "segunda lectura": podríamos sustituir las cargas originales del problema (distribuidas) por unas fuerzas concentradas en los nodos, cuyas componentes fuesen las de \mathbf{f}_i para cada nodo i . Evidentemente el modelo aproximado resulta idénticamente el mismo, y conduce por tanto a los mismos resultados. De ello obtenemos el significado físico de los términos como \mathbf{f}_i : son fuerzas concentradas en los nodos con las que el modelo de aproximación representa el efecto de las cargas originales del problema. Por ello se suele denominar a las submatrices \mathbf{f}_i de \mathbf{f} fuerzas equivalentes en los nodos.

Interpretación como discretización en elementos.

Cuando tenemos que integrar una función que tiene distinta expresión analítica en distintos trozos del intervalo de integración, de modo natural procedemos evaluando la integral en cada trozo para después sumar los resultados parciales. Del mismo modo, realizaremos la integral necesaria para evaluar \mathbf{K}_{ij} (también \mathbf{f}_i), integrando en trozos del dominio de integración, y sumando después las integrales parciales. Claramente, cada "trozo" referido será un elemento, dado que en un elemento cada función de forma mantiene una expresión analítica. Por ejemplo, la figura 7.6 muestra el caso en que los nodos i y j son adyacentes (decimos que lo son si hay al menos un elemento al que ambos pertenecen).

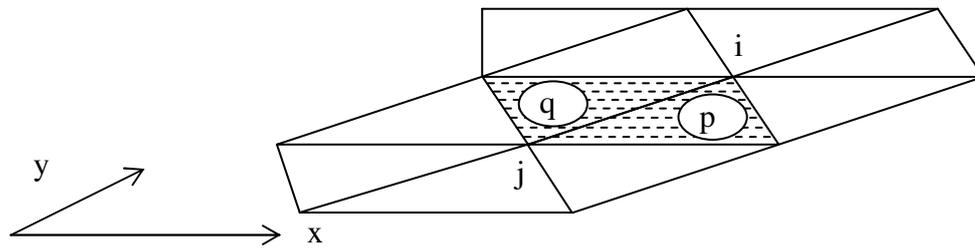


Figura 7.6.- Dominio de integración. Caso de nodos adyacentes.

En este caso, el dominio de integración para $\underline{\underline{K}}_{ij}$ constará de los elementos p y q indicados, ya que ellos constituyen la intersección de los soportes de las funciones N_i y N_j . Realizaremos la integral por trozos, integrando en cada elemento y sumando esas integrales parciales. Distinguiremos el resultado de cada una de esas integrales parciales con un superíndice indicativo del elemento sobre la que está realizada, según se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K}}_{ij} &= \int_{p+q} (\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{N}}_i)^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot (\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{N}}_j) \cdot dV = \\ &= \int_p (\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{N}}_i)^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot (\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{N}}_j) \cdot dV + \int_q (\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{N}}_i)^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot (\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{N}}_j) \cdot dV = \underline{\underline{K}}_{ij}^{(p)} + \underline{\underline{K}}_{ij}^{(q)} \end{aligned}$$

Cuando se trata de calcular una submatriz tipo $\underline{\underline{K}}_{ii}$, el dominio de integración constará de todos los elementos que constituyan el soporte de N_i . La figura 7.7 muestra por ejemplo un caso en que dicho dominio está constituido por seis elementos, p, q, r, s, t, m.

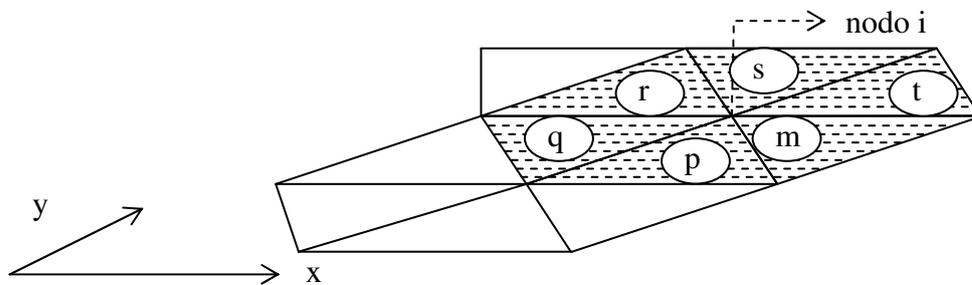


Figura 7.7.- Dominio de integración. Caso de nodos coincidentes.

Procederemos análogamente calculando la integral en cada elemento y sumando:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K}}_{ii} &= \int_V (\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{N}}_i)^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot (\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{N}}_i) \cdot dV = \int_{p+q+r+s+t+m} = \int_p + \int_q + \int_r + \int_s + \int_t + \int_m = \\ &= \underline{\underline{K}}_{ii}^{(p)} + \underline{\underline{K}}_{ii}^{(q)} + \underline{\underline{K}}_{ii}^{(r)} + \underline{\underline{K}}_{ii}^{(s)} + \underline{\underline{K}}_{ii}^{(t)} + \underline{\underline{K}}_{ii}^{(m)} \end{aligned}$$

El otro caso posible, en el que los nodos i,j sean no adyacentes, conlleva que la submatriz $\underline{\underline{K}}_{ij}$ sea nula, ya que no hay soporte común de N_i y N_j . En todo caso, podemos expresar de modo simbólico que la submatriz $\underline{\underline{K}}_{ij}$ será la suma de las submatrices $\underline{\underline{K}}_{ij}^{(e)}$ correspondientes a integrar sobre cada elemento "e" que forme el soporte común:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ij} = \sum_e \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ij}^{(e)} \quad (7.14)$$

La submatrices $\underline{\underline{\mathbf{f}}}_i$ del término de cargas admiten una expresión similar. En este caso no hay consideraciones relativas al "soporte común", ya que sólo interviene una función de aproximación (la N_i), y el dominio de integración consta de los elementos que componen el soporte de esa función. Realizando la integral correspondiente por elementos, tendremos:

$$\underline{\underline{\mathbf{f}}}_i = \sum_e \underline{\underline{\mathbf{f}}}_i^{(e)} \quad (7.15)$$

Donde

$$\underline{\underline{\mathbf{f}}}_i^{(e)} = \int_e (\underline{\underline{\mathbf{N}}}_i)^T \underline{\underline{\mathbf{X}}} dV + \int_{S^e} (\underline{\underline{\mathbf{N}}}_i)^T \underline{\underline{\mathbf{X}}} dS + \int_e (\underline{\underline{\mathbf{L}}}\underline{\underline{\mathbf{N}}}_i)^T \underline{\underline{\mathbf{D}}}\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^0 dV$$

Por supuesto, solo deberemos evaluar cada una de estas integrales en los elementos en que exista respectivamente, alguna carga de volumen, carga de contorno, o deformación inicial. Adicionalmente, la segunda integral sólo debe evaluarse en elementos con alguno de sus lados sobre el contorno del sólido, habiéndose notado como S^e la parte de S que corresponde al elemento e .

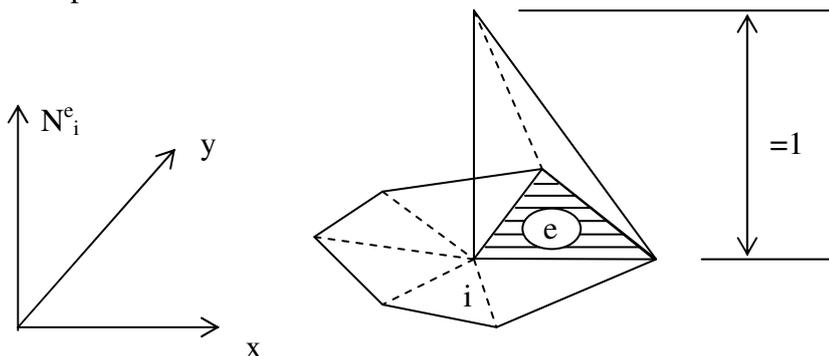


Figura 7.8.- Función de aproximación asociada al nodo i y al elemento e .

El haber definido las aportaciones elementales $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ij}^{(e)}$, $\underline{\underline{\mathbf{f}}}_i^{(e)}$, hace natural definir también las "funciones de forma elementales": N_i^e será idéntica a la función de forma N_i dentro del elemento e , pero será nula fuera de este elemento. De esta manera, N_i^e será una de las caras de la pirámide de la figura 7.5. La figura 7.8 muestra gráficamente una representación de esta función de forma del elemento.

Dado que para calcular la submatriz $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ij}^{(e)}$ sólo vamos a integrar sobre el elemento e , se cumple evidentemente que:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ij}^{(e)} = \int_e \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_i \right)^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_j \right) \cdot dV = \int_e \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_i^{(e)} \right)^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_j^{(e)} \right) \cdot dV \quad (7.16)$$

Para $\underline{\underline{\mathbf{f}}}_i^{(e)}$ cabe aplicar idéntica consideración. Desde el punto de vista conceptual no ha habido ninguna novedad. Operativamente, sin embargo, encontramos que podemos calcular por separado las aportaciones de cada elemento a la matriz de rigidez (también al vector de cargas), y posteriormente sumar las que tengan los mismos subíndices para obtener el valor correspondiente de la matriz global $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ (igualmente para $\underline{\underline{\mathbf{f}}}$). Al acto de

sumar las aportaciones elementales se le denomina frecuentemente "ensamblar" la matriz de rigidez (o el término de cargas). Es aconsejable proceder considerando por turno cada elemento, calculando todas sus aportaciones de interés, y ensamblar después las matrices globales, con toda la información relevante ya calculada. El cálculo por elementos nos obliga a ser organizados, y lo que es más importante, sistematiza el proceso de manera adecuada para ser implementado en ordenador. Por otra parte, las integrales a calcular serán siempre sobre un elemento, con lo que los integrandos tendrán una sola expresión analítica en cada integral.

La presentación del concepto de matrices y funciones de forma elementales realizado en los párrafos precedentes, constituye la base para poder introducir ahora la interpretación de la aproximación como discretización en elementos, lo que constituye el objeto principal de este apartado. Imaginemos un elemento p separado del resto del sólido, constituido él mismo en sólido independiente, sobre el que actúan fuerzas concentradas en los nodos, que denotaremos como $\mathbf{F}_i^{(p)}$ (elemento p , nodo i), como muestra la figura 7.9.

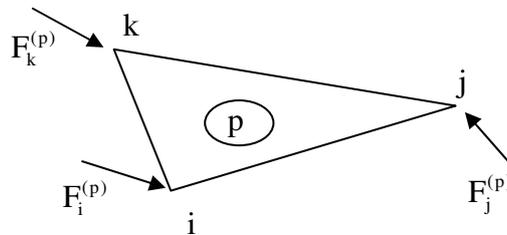


Figura 7.9.- Elemento triangular aislado, sometido a fuerzas en los nodos.

Habiendo calculado las submatrices elementales de rigidez, es inmediato plantear la ecuación que rige el comportamiento de este elemento aislado:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ii}^{(p)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ij}^{(p)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ik}^{(p)} \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ji}^{(p)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{jj}^{(p)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{jk}^{(p)} \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ki}^{(p)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{kj}^{(p)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{kk}^{(p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{a}}}_i \\ \underline{\underline{\mathbf{a}}}_j \\ \underline{\underline{\mathbf{a}}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{F}}}_i^{(p)} \\ \underline{\underline{\mathbf{F}}}_j^{(p)} \\ \underline{\underline{\mathbf{F}}}_k^{(p)} \end{bmatrix}$$

Pensemos ahora que el elemento, está conectado a otros elementos vecinos a través de sus nodos, y consideremos todos los elementos que comparten el nodo i . Sea por ejemplo la configuración de nodos y elementos que muestra la figura 7.10. Por simplicidad se supone que sólo dos elementos, p , q , comparten el nodo i , pero el razonamiento que sigue no se ve afectado si hay más elementos. Se asume además que actúa una fuerza exterior \mathbf{f}_i sobre el nodo i (que podría ser la "fuerza nodal equivalente", o simplemente una fuerza concentrada).

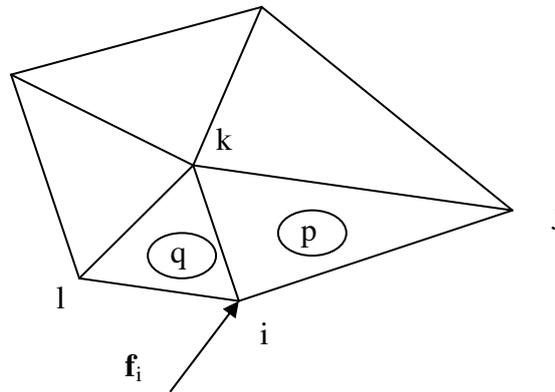


Figura 7.10.- Elemento conectado a otros a través de sus nodos.

La suma de fuerzas que actúan *sobre* el nodo i debe ser cero. Éstas son: la fuerza exterior y las que actúan sobre los elementos cambiadas de signo. Por tanto:

$$\underline{F}_i^{(p)} + \underline{F}_i^{(q)} = \underline{f}_i$$

Es decir:

$$\underline{K}_{ii}^{(p)} \underline{a}_i + \underline{K}_{ij}^{(p)} \underline{a}_j + \underline{K}_{ik}^{(p)} \underline{a}_k + \underline{K}_{ii}^{(q)} \underline{a}_i + \underline{K}_{ik}^{(q)} \underline{a}_k + \underline{K}_{il}^{(q)} \underline{a}_l = \underline{f}_i$$

O sea:

$$(\underline{K}_{ii}^{(p)} + \underline{K}_{ii}^{(q)}) \underline{a}_i + \underline{K}_{ij}^{(p)} \underline{a}_j + (\underline{K}_{ik}^{(p)} + \underline{K}_{ik}^{(q)}) \underline{a}_k + \underline{K}_{il}^{(q)} \underline{a}_l = \underline{f}_i$$

Como se aprecia en la figura 7.10, las aportaciones a \underline{K}_{ii} y a \underline{K}_{ik} son sólo las de los elementos p y q, mientras que la única aportación a \underline{K}_{ij} es la del elemento p, y a \underline{K}_{il} la del elemento q. Por tanto es correcto escribir la última ecuación como:

$$\underline{K}_{ii} \underline{a}_i + \underline{K}_{ij} \underline{a}_j + \underline{K}_{ik} \underline{a}_k + \underline{K}_{il} \underline{a}_l = \underline{f}_i$$

Que contiene todos los términos no nulos de las ecuaciones (dos o tres, según sea un problema 2D o 3D) correspondientes al nodo i en el sistema general de ecuaciones $\underline{K}\underline{a}=\underline{f}$. Lo realizado para el nodo i puede hacerse para cualquier otro, obteniéndose así todas las ecuaciones de la aproximación. Esto nos proporciona la siguiente manera alternativa, atractiva físicamente, de entender la aproximación por Elementos Finitos:

Hubiésemos obtenido el mismo modelo de aproximación dividiendo el sólido en trozos (elementos) y uniéndolos entre sí por sus nodos. Planteando el equilibrio de cada nodo resulta el mismo sistema de ecuaciones obtenido primeramente en este epígrafe 7.3 a partir de la aproximación de Galerkin. Para plantear ese equilibrio debemos conocer (o aproximar) el comportamiento aislado de cada elemento.

Históricamente, el Método de los Elementos Finitos nació hacia los años 1955-1956 basándose en esta idea de "discretización en elementos", es decir, suponiendo un comportamiento simplificado para las porciones pequeñas (pero finitas) del continuo, y conectándolas entre sí de una manera también simplificada. Esta idea tiene sus antecedentes directos en trabajos anteriores (década de 1940), que sustituían el

comportamiento de un continuo por sistemas de barras conectadas entre sí, empleando para ello diversos criterios.

Hoy día, dicho enfoque histórico es todavía empleado por algunos autores para presentar de un modo rápido esta técnica de aproximación, sin necesidad de referir a conocimientos previos como el PDV o la aproximación de Galerkin. Cuando se sigue este camino expositivo se precisa aclarar ciertas cuestiones laterales, como por ejemplo “¿qué ha ocurrido con las tensiones entre las caras de los elementos?”, ya que no es evidente si es razonable (y hasta qué punto) sustituir el sólido continuo por un conjunto de sólidos poligonales unidos sólo por sus esquinas. A pesar de las aclaraciones que se ofrezcan, tal exposición corre probablemente el riesgo de que, a falta de otros conocimientos en los que apoyarse, el lector piense que la aproximación ha sido planteada de modo tentativo, y simplemente "funciona" (históricamente ocurrió precisamente así).

Por ello se ha considerado preferible presentar el Método de los Elementos Finitos en el ámbito de todo un “cuerpo de doctrina” de los métodos aproximados, que deja muy poco lugar a dudas acerca de la verosimilitud de las aproximaciones. El lector tendrá claro, en efecto, que simplemente se han planteado tantas condiciones necesarias para el equilibrio (PDVs) como ha sido preciso para obtener un número de ecuaciones que permita calcular los parámetros indeterminados del campo de desplazamientos aproximado. La interpretación que de ello pueda hacerse será en todo caso un detalle marginal, que no afecta al planteamiento del método.

En resumen, en este apartado se ha mostrado que la aproximación de Elementos Finitos admite la interpretación de considerar al sólido como formado por elementos que están unidos solamente por sus nodos, garantizando la continuidad de los desplazamientos. Por atractiva que esta interpretación pueda resultar, se pretende simplemente que el lector tenga noticia de ella, no que cambie su punto de vista acerca de los fundamentos del método. También se ha mostrado que desde el punto de vista operativo conviene proceder organizadamente, calculando en primer lugar las aportaciones elementales de interés y realizando después su "ensamblado".

Consideraciones adicionales.

El término de cargas \mathbf{f} de la aproximación, ver ecuación (7.12), consta de dos integrales de dominio mas una integral de contorno. El integrando de las integrales de dominio son normalmente conocidos, y esas integrales deben ser evaluadas allí donde no se anule el integrando, es decir en todos los elementos donde la fuerza de volumen o el campo término no se anulen. El integrando de la integral de contorno es desconocido en las zonas de desplazamiento prescrito, por lo que aparecerán incógnitas en \mathbf{f} (nótese que las funciones de forma de Elementos Finitos no satisfacen automáticamente las condiciones de contorno en desplazamientos). Por lo demás, la integral de contorno debe asimismo evaluarse en los elementos en que el integrando no se anule. Discutiremos brevemente los casos que pueden presentarse al respecto. En primer lugar, las funciones de aproximación de nodos que no pertenecen al contorno del sólido, valen cero en dicho contorno (por ejemplo el nodo j de la figura 7.11, y cualquier otro nodo

interior). Las integrales de contorno que incluyan las funciones de forma de estos nodos serán cero. Por ejemplo, en la figura 7.11, $N_j=0$ en el contorno, por lo que la aportación de la integral de contorno correspondiente a \mathbf{f}_j es nula:

$$\int_S \underline{N}_j^T \bar{\mathbf{X}} \cdot dS = 0$$

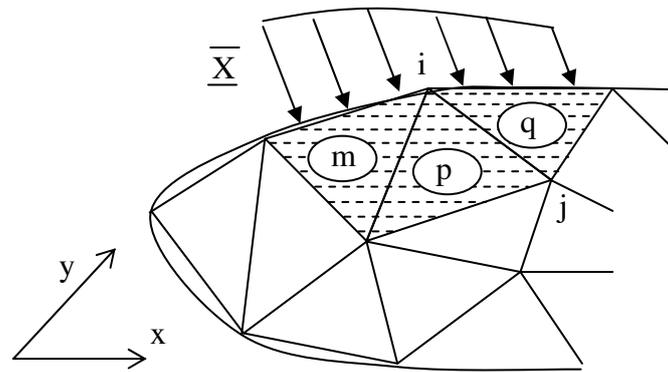


Figura 7.11.- Discretización en el contorno del sólido.

Por consiguiente, hay muchos términos de \mathbf{f} para los que no hay que calcular la integral de contorno: todos los \mathbf{f}_j correspondientes a nodos j interiores, y además todos los nodos de contorno en cuyo soporte (el de su función de forma) no haya carga de contorno. Por el contrario, si el nodo i está situado en el contorno y existe carga de contorno no nula en el soporte, debemos sumar las contribuciones de los elementos que constituyen dicho soporte. Es el caso del nodo i de la figura 7.11, cuya función de forma N_i no es nula en el contorno en los elementos q y m . Realizamos la integral correspondiente sumando ("ensamblando") las aportaciones elementales:

$$\begin{aligned} \int_S \underline{N}_i^T \bar{\mathbf{X}} \cdot dS &= \int_{S_p} (\underline{N}_i^{(p)})^T \bar{\mathbf{X}} \cdot dS + \int_{S_q} (\underline{N}_i^{(q)})^T \bar{\mathbf{X}} \cdot dS + \int_{S_m} (\underline{N}_i^{(m)})^T \bar{\mathbf{X}} \cdot dS = \\ &= \int_{S_q} (\underline{N}_i^{(q)})^T \bar{\mathbf{X}} \cdot dS + \int_{S_m} (\underline{N}_i^{(m)})^T \bar{\mathbf{X}} \cdot dS \end{aligned}$$

En principio se ha incluido también una integral extendida al contorno del sólido perteneciente al elemento p , S_p . Sin embargo, S_p se reduce a un punto, por lo que la integral correspondiente es nula. Cabría discutir que no lo fuera si en integrando se hiciese infinito en ese punto. El único caso que estudiaremos en el que eso puede ocurrir es el de fuerza concentrada, y ya se ha visto que finalmente su tratamiento resulta muy simple, no siendo siquiera provechoso el considerar sus aportaciones elementales.

Como segunda y última "consideración adicional" en este apartado, llamaremos la atención sobre el hecho de que las submatrices \mathbf{K}_{ij} de \mathbf{K} admiten una interpretación como coeficientes de influencia, pero definidos en un sentido de rigidez en lugar de en el sentido inverso, de flexibilidad, con el que se trabajó en el epígrafe 5.10. Es decir, cada componente de un "tensor de coeficientes de influencia" definido en (5.11) representaba el desplazamiento de un punto en cierta dirección cuando se aplicaba una fuerza unidad en otro punto y según otra dirección. En cambio, cada componente de una "submatriz de rigidez" representa la fuerza que aparece en un nodo según una dirección cuando se

impone un movimiento unidad en otro nodo según otra dirección, y movimiento nulo en todas las componentes de todos los nodos, salvo la citada. La figura 7.12 ayudará a apreciar lo anterior.

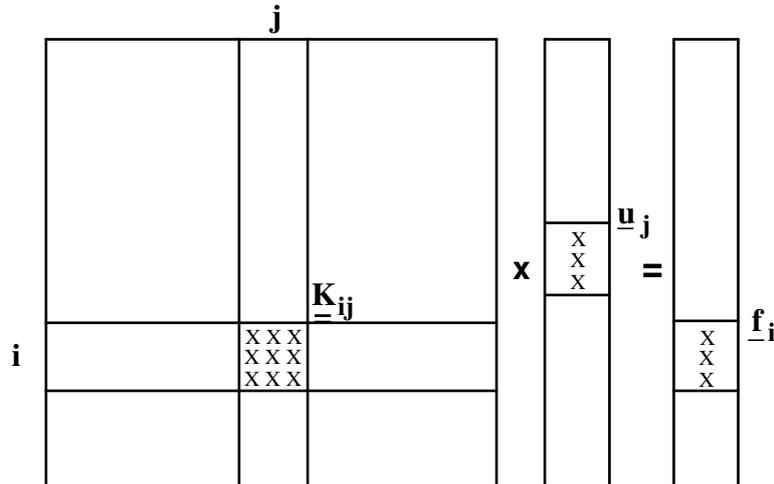


Figura 7.12.- Estructura del sistema de ecuaciones final.

El interés de la apreciación anterior es doble:

Por una parte, establece una relación entre la matriz de rigidez y la de coeficientes de influencia. En efecto, considérese la matriz global de coeficientes de influencia para un problema con determinadas condiciones de contorno en desplazamientos, que relacione todos los movimientos de los nodos con todas las fuerzas nodales existentes, en ambos casos exceptuando a los nodos con desplazamiento impedido. La ecuación correspondiente será del tipo $\mathbf{a}' = \mathbf{C}\mathbf{f}'$ (\mathbf{a}' y \mathbf{f}' contienen las variables asociadas a todos los nodos salvo los de desplazamiento impedido) La matriz global de coeficientes de influencia \mathbf{C} , admite inversa (recuérdese que está definida para unas condiciones de contorno en desplazamientos prefijadas, ver epígrafe 5.10), por lo que podemos escribir la relación inversa $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{a}' = \mathbf{f}'$. Si en la ecuación global de la aproximación por elementos finitos, $\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$, imponemos las condiciones de contorno (homogéneas) en desplazamientos y descartamos las variables asociadas a nodos con desplazamiento impedido, obtendremos una relación del tipo $\mathbf{K}'\mathbf{a}' = \mathbf{f}'$. Veremos en los ejemplos que esta imposición de condiciones de contorno se hace simplemente eliminando filas y columnas de \mathbf{K} , por lo que \mathbf{K}' resulta ser simplemente un subconjunto de \mathbf{K} . Es por tanto evidente que \mathbf{C}^{-1} , inversa de la matriz de coeficientes de influencia, es igual que \mathbf{K}' , matriz de rigidez con las condiciones de contorno ya impuestas.

Por otra parte, permite apreciar que las nueve componentes, -cuatro en problemas 2D-, de cada submatriz \mathbf{K}_{ij} forman un tensor (cartesiano de orden dos, pero en general no simétrico), ya que relaciona dos vectores. Frecuentemente es útil transformar las variables a coordenadas inclinadas (para imponer condiciones de contorno según direcciones inclinadas, por ejemplo). Para transformar la submatriz de rigidez a otros ejes sólo hay que aplicarle la ley de transformación de los tensores. Se sugiere que para ello se exprese primeramente la ley de transformación de forma matricial, y se aplique de esta manera, para evitar confusión con los subíndices de \mathbf{K}_{ij} , que aquí no representan las coordenadas espaciales, sino a los nodos i y j .

7.4.- Ejemplos.

Ejemplo 1.

Pretendemos averiguar, sin calcular su valor, qué posiciones de la matriz global \mathbf{K} correspondiente a la discretización bidimensional de la figura 7.13 son distintas de cero. Lo serán aquellas en las que se deba ensamblar la aportación de algún elemento.

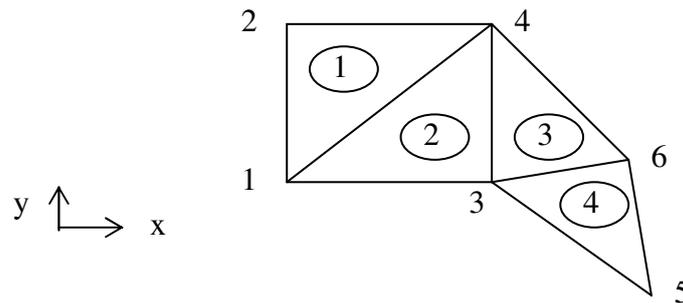


Figura 7.13.- Problema bidimensional. Discretización: seis nodos y cuatro elementos triangulares.

La matriz \mathbf{K} que resulta de aplicar el MEF es una matriz cuadrada, formada por submatrices \mathbf{K}_{ij} de dimensiones (2×2) en problemas bidimensionales. Cada submatriz se expresa como:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ij} = \int_V \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_i \right)^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_j \right) \cdot dV$$

Cada integral como la anterior debe evaluarse allí donde el integrando no sea nulo, es decir, en el soporte común de las funciones N_i y N_j . Por ejemplo, \mathbf{K}_{11} debe evaluarse en todo el soporte de N_1 , que está formado por los elementos 1 y 2. Por tanto:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{11} &= \int_V \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_1 \right)^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_1 \right) \cdot dV = \int_1 \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_1^{(1)} \right)^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_1^{(1)} \right) \cdot dV + \\ &+ \int_2 \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_1^{(2)} \right)^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_1^{(2)} \right) \cdot dV = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{11}^{(1)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{11}^{(2)} \end{aligned}$$

De modo análogo, procederemos sucesivamente para cada par de nodos, siguiendo el orden 11, 12, ..., 16, 22, 23, ..., 26, 33, 34, ..., 36, 44, 45, 46, 55, 56, 66, apreciando en cada caso si las funciones de forma correspondientes tienen soporte común. En caso afirmativo habrá aportación no nula de cada elemento que constituya el soporte común. En caso negativo la submatriz será nula. No es preciso ocuparse de las submatrices bajo la diagonal principal de \mathbf{K} , como \mathbf{K}_{64} ya que $\mathbf{K}_{64} = \mathbf{K}_{46}^T$.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{12} &= \int_V \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_1 \right)^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_2 \right) \cdot dV = \int_1 \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_1^{(1)} \right)^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_2^{(1)} \right) \cdot dV = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{12}^{(1)} \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{13} &= \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{13}^{(2)} \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{14} &= \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{14}^{(1)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{14}^{(2)} \end{aligned}$$

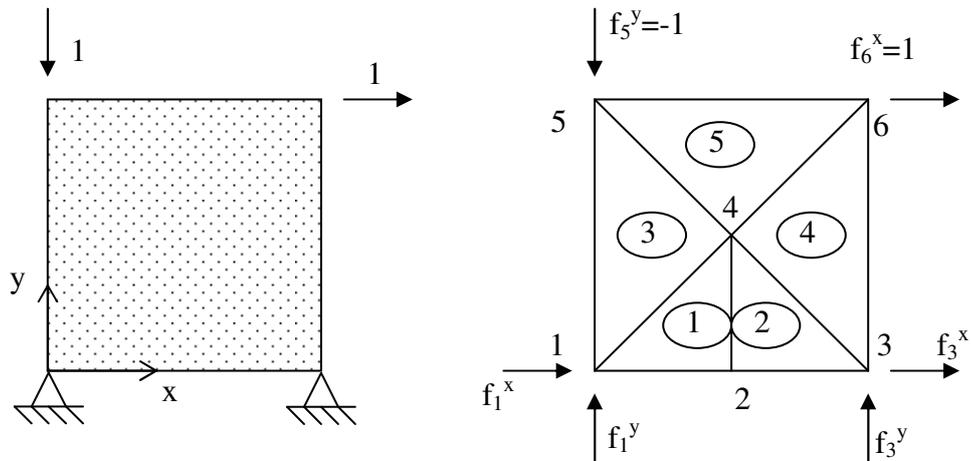


Figura 7.14.- Problema bidimensional y su discretización.

La estructura de la matriz de rigidez se averigua mediante el mismo procedimiento utilizado en el ejemplo anterior:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{11}^{(1)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{11}^{(3)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{12}^{(1)} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{14}^{(1)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{14}^{(3)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{15}^{(3)} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{22}^{(1)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{22}^{(2)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{23}^{(2)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{24}^{(1)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{24}^{(2)} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ & & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{33}^{(2)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{33}^{(4)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{34}^{(2)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{34}^{(4)} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{36}^{(4)} \\ & & & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{44}^{(1)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{44}^{(2)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{44}^{(3)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{44}^{(4)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{44}^{(5)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{45}^{(3)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{45}^{(5)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{46}^{(4)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{46}^{(5)} \\ & & & & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{55}^{(3)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{55}^{(5)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{56}^{(5)} \\ & & & & & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{66}^{(4)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{66}^{(5)} \end{array} \right)$$

Y el sistema de ecuaciones es:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_2^x \\ a_2^y \\ 0 \\ 0 \\ a_4^x \\ a_4^y \\ a_5^x \\ a_5^y \\ a_6^x \\ a_6^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^x \\ f_1^y \\ 0 \\ 0 \\ f_3^x \\ f_3^y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Podemos extraer algunas enseñanzas interesantes de este ejemplo:

En primer lugar, todas las submatrices \mathbf{K}_{i1} , \mathbf{K}_{i3} , ($i=1\dots6$), se van a multiplicar por cero en el sistema de ecuaciones. Podríamos haber prestado atención a este detalle y obviar su cálculo. Esto ocurrirá siempre con los nodos cuyo desplazamiento esté totalmente impedido, como es aquí el caso de los nodos 1 y 3.

En segundo lugar, apreciamos que si en un nodo es incógnita la componente de desplazamiento según una dirección, la componente correspondiente de la "fuerza nodal" no es incógnita, y viceversa, si la incógnita es el desplazamiento no lo es la fuerza. Por tanto el sistema de ecuaciones se mantiene con $2n$ incógnitas ($3n$ en problemas tridimensionales; n = número de nodos). Esto ocurrirá siempre en las aproximaciones de Elementos Finitos, pero en general no ocurriría con una aproximación de Galerkin (a menos que las funciones de aproximación se ajustasen de partida a las condiciones de contorno en desplazamientos).

En tercer lugar, vemos que las ecuaciones (escalares) 3ª, 4ª, 7ª, 8ª, 9ª, 10ª, 11ª y 12ª forman un sistema de ocho ecuaciones con ocho incógnitas (todas ellas desplazamientos). Este sistema de ocho ecuaciones es resoluble, y permite calcular todos los desplazamientos nodales desconocidos. Una vez realizado esto, pueden calcularse las fuerzas nodales desconocidas empleando el resto de las ecuaciones (1ª, 2ª, 5ª y 6ª). Este procedimiento es aplicable con generalidad para calcular las incógnitas de una aproximación por el Método de Elementos Finitos.

Ejemplo 3.

Determinaremos la expresión de la función $N_i^{(e)}$, asociada al nodo i y definida sobre el elemento triangular de tres nodos e (figura 7.15).

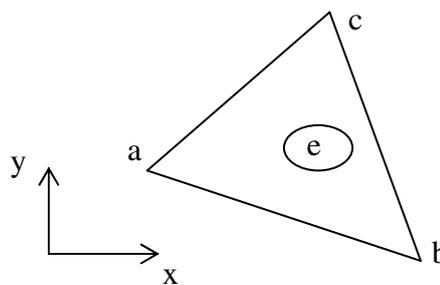


Figura 7.15.- Elemento 2D triangular de tres nodos.

Las condiciones básicas que debe cumplir dicha función son: valer la unidad en el nodo i , y cero en los restantes. Estas condiciones proporcionan en nuestro caso tres ecuaciones, que permiten determinar tres parámetros. Casi siempre se utilizan funciones de forma polinómicas. Podemos completar un polinomio de primer grado en x, y , para la función de forma asociada a cada nodo del elemento:

$$N_a^{(e)} = \alpha_a + \beta_a x + \gamma_a y ; \quad N_b^{(e)} = \alpha_b + \beta_b x + \gamma_b y ; \quad N_c^{(e)} = \alpha_c + \beta_c x + \gamma_c y$$

Que expresado en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} N_a^{(e)} & N_b^{(e)} & N_c^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_a & \alpha_b & \alpha_c \\ \beta_a & \beta_b & \beta_c \\ \gamma_a & \gamma_b & \gamma_c \end{bmatrix}$$

Planteando la expresión matricial anterior para las coordenadas del nodo "a" (x_a, y_a), nodo "b" (x_b, y_b) y nodo "c" (x_c, y_c), resulta:

$$\begin{bmatrix} N_a^{(e)}(\underline{x}_a) & N_b^{(e)}(\underline{x}_a) & N_c^{(e)}(\underline{x}_a) \\ N_a^{(e)}(\underline{x}_b) & N_b^{(e)}(\underline{x}_b) & N_c^{(e)}(\underline{x}_b) \\ N_a^{(e)}(\underline{x}_c) & N_b^{(e)}(\underline{x}_c) & N_c^{(e)}(\underline{x}_c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_a & y_a \\ 1 & x_b & y_b \\ 1 & x_c & y_c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_a & \alpha_b & \alpha_c \\ \beta_a & \beta_b & \beta_c \\ \gamma_a & \gamma_b & \gamma_c \end{bmatrix}$$

Luego las dos matrices del miembro derecho son una la inversa de la otra. Invertiendo la matriz de coordenadas de los nodos obtenemos la que contiene los coeficientes de las funciones de forma del elemento:

$$\begin{bmatrix} \alpha_a & \alpha_b & \alpha_c \\ \beta_a & \beta_b & \beta_c \\ \gamma_a & \gamma_b & \gamma_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_a & y_a \\ 1 & x_b & y_b \\ 1 & x_c & y_c \end{bmatrix}^{-1}$$

El procedimiento anterior, puede aplicarse para cualquier otro tipo de elemento, bi o tridimensional. No estamos limitados a elementos triangulares, ni de lados rectos (aunque sí debemos asegurar la continuidad de desplazamientos entre elementos). Por ejemplo, puede utilizarse un elemento bidimensional de ocho nodos como el mostrado en la figura 7.16. Habiendo 8 nodos, podremos incluir 8 parámetros en cada función de forma. Como regla general, conviene plantear polinomios completos hasta el grado que sea posible, y no incluir términos de orden superior si no se ha completado el polinomio de orden inferior. En este caso podemos completar un polinomio de segundo grado (que en dos dimensiones tiene 6 términos), y deberemos tomar además 2 de los términos de cuarto grado, por ejemplo los x^2y , xy^2 .

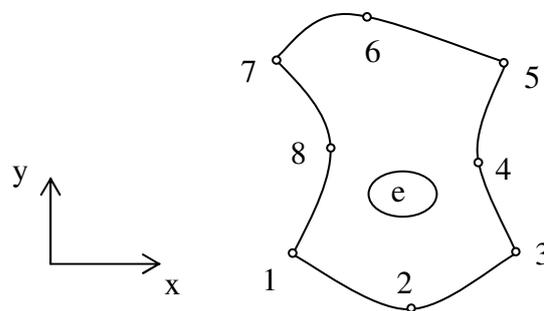


Figura 7.16.- Elemento bidimensional de ocho nodos.

La función de forma de cada nodo i del elemento, tendría una expresión del tipo $a_i + b_i x + c_i y + d_i x^2 + e_i xy + f_i y^2 + g_i x^2 y + h_i xy^2$, y los coeficientes $a_i \dots h_i$ (con $i=1..8$) se podrían encontrar mediante una ecuación matricial similar a la planteada para el elemento triangular. El uso extensivo de este procedimiento tiene algunos inconvenientes. En primer lugar, la

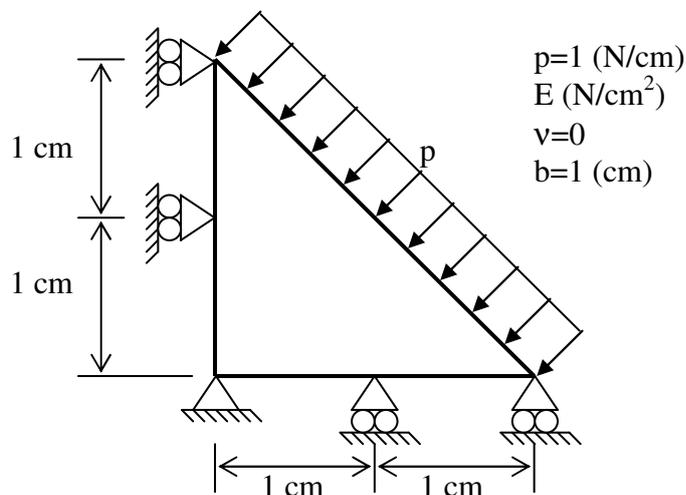
existencia de matriz inversa no está garantizada para todas las geometrías. Por otra parte, la inversión de una matriz para cada elemento llega a suponer un coste computacional apreciable. Además, el definir elementos complicados siguiendo el procedimiento descrito complica la integración numérica. Debido a ello, y aunque algunos de los primeros programas de Elementos Finitos utilizaban este procedimiento, en la actualidad se prefiere plantear estos elementos "complicados" (de lados curvos y orden superior) mediante una transformación de un dominio normalizado de geometría parecida a la que aparece en espacio x,y , pero más sencilla.

En el dominio normalizado las funciones de forma están definidas y son siempre las mismas. Las integraciones numéricas se plantean también en el dominio normalizado, no presentando mayor problema que la inclusión en la integral del Jacobiano correspondiente a la transformación de la geometría normalizada en la real. Simplemente hay que cuidar que la distorsión del elemento real respecto de la geometría normalizada no sea excesiva. Por ejemplo, el elemento de la figura 7.16 en el espacio $x-y$ podría obtenerse mediante transformación de un elemento que en un espacio normalizado $\xi-\eta$ fuese un cuadrado de lados rectos que ocupase $(-1,+1)$ en cada coordenada, y tuviese nodos en las esquinas y en la mitad de los lados. El concepto "tipos de elementos" que un programa comercial de Elementos Finitos tiene implementados" se corresponde con las configuraciones en el dominio normalizado que el programa tenga programadas, y conviene conocer cómo están construidas para no distorsionar el elemento demasiado, lo que podría causar la no biunicidad de la transformación, e inexactitudes en la integración numérica. Los detalles de esta técnica de transformación no son complicados, pero caen fuera de los propósitos de esta breve introducción al MEF. El lector interesado puede consultar por ejemplo el libro de Zienkiewicz recomendado al final del capítulo.

Ejemplo 4.

Con el fin de consolidar las ideas expuestas en los ejemplos anteriores, aplicaremos paso a paso el Método de los Elementos Finitos al problema propuesto en la figura 7.17.

Figura 7.17.- Placa triangular sometida a carga uniforme en su cara oblicua.



Dicha figura, muestra un sólido de sección triangular y espesor unidad ($b=1\text{ cm}$), sometido en su cara oblicua a una carga uniformemente distribuida de valor $p=1\text{ (N/cm)}$, y sustentado según se indica. Las características elásticas del material que compone el sólido a analizar son: Módulo de Young $E\text{ (N/cm}^2\text{)}$, y Coeficiente de Poisson nulo. La discretización empleada es la que se indica en la figura 7.18, y consta de dos elementos triangulares y un elemento cuadrado. La posición geométrica de los nodos se ha elegido coincidente con la de los apoyos, para que las condiciones de contorno en desplazamientos se puedan imponer fácilmente.

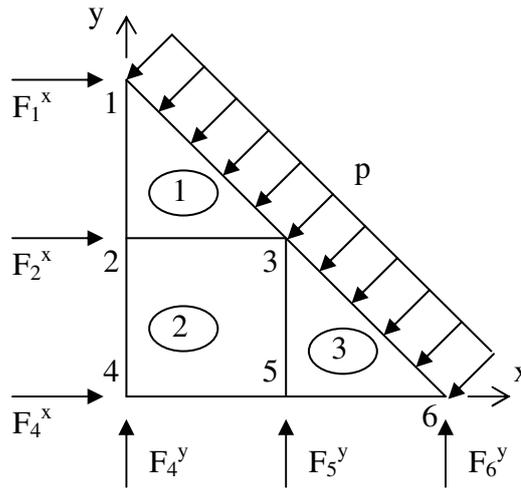


Figura 7.18.- Discretización del dominio empleada.

En primer lugar, determinamos las expresiones analíticas de las funciones de aproximación del campo de desplazamientos $N_i^{(e)}$, para cada nodo i y elemento e .

Elemento 1: En nuestro caso, dado lo sencillo de las geometrías elementales, las funciones de forma se pueden encontrar por simple inspección. No obstante aprovecharemos para ilustrar el procedimiento expuesto en el ejemplo anterior. Para un elemento de tres nodos, consideraremos un polinomio completo en x, y , como función de forma. Obtendremos los coeficientes invirtiendo la matriz de coordenadas nodales:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow \begin{aligned} N_1^{(1)} &= y - 1 \\ N_2^{(1)} &= 2 - x - y \\ N_3^{(1)} &= x \end{aligned}$$

Elemento 3:

$$\begin{bmatrix} \alpha_3 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ \beta_3 & \beta_5 & \beta_6 \\ \gamma_3 & \gamma_5 & \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow \begin{aligned} N_3^{(3)} &= y \\ N_5^{(3)} &= 2 - x - y \\ N_6^{(3)} &= x - 1 \end{aligned}$$

Elemento 2: Se trata de un elemento con cuatro nodos, y por lo tanto, como funciones de forma podemos considerar polinomios en x, y , con cuatro parámetros indeterminados. Siguiendo la pauta recomendada, elegimos completar el polinomio de orden uno (tres

términos). Debemos incluir un término más aunque con ello no podamos completar un polinomio de orden dos. Elegimos por ejemplo el término xy :

$$\begin{bmatrix} N_2^{(2)} & N_3^{(2)} & N_4^{(2)} & N_5^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 \\ \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 \end{bmatrix}$$

Planteando esta ecuación para cada uno de los nodos del elemento e invirtiendo la matriz correspondiente, obtenemos los coeficientes de las funciones de forma:

$$\begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 \\ \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow \begin{cases} N_2^{(2)} = y - xy \\ N_3^{(2)} = xy \\ N_4^{(2)} = 1 - x - xy + xy \\ N_5^{(2)} = x - xy \end{cases}$$

A continuación, calcularemos las aportaciones de cada uno de los elementos a la matriz de rigidez global. La matriz de constantes elásticas es:

$$\underline{\underline{D}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Elemento 1. Las funciones de forma del elemento 1 son lineales, por lo tanto, sus derivadas son constantes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1^{(1)}}{\partial x} &= 0; \frac{\partial N_2^{(1)}}{\partial x} = -1; \frac{\partial N_3^{(1)}}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial N_1^{(1)}}{\partial y} &= 1; \frac{\partial N_2^{(1)}}{\partial y} = -1; \frac{\partial N_3^{(1)}}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

Con esto tenemos:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K}}_{11}^{(1)} &= \int_V E \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} dV = \frac{E}{2} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \underline{\underline{K}}_{12}^{(1)} &= \int_V E \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} dV = \frac{E}{2} \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{13}^{(1)} = \int_V E \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dV = \frac{E}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{22}^1 = \int_V E \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} dV = \frac{E}{2} \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{23}^1 = \int_V E \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dV = \frac{E}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{33}^{(1)} = \int_V E \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dV = \frac{E}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Elemento 3. Cada una de sus funciones de forma sólo difiere en una constante de las del nodo homólogo del elemento 1, por lo que sus derivadas son idénticas. Por tanto, no tenemos más que cambiar el nombre de los nodos del elemento 1, y obtenemos las submatrices del elemento 3:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{33}^{(3)} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{11}^{(1)} = \frac{E}{2} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{55}^{(3)} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{22}^{(1)} = \frac{E}{2} \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{35}^{(3)} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{12}^{(1)} = \frac{E}{2} \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{56}^{(3)} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{23}^{(1)} = \frac{E}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{36}^3 = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{13}^1 = \frac{E}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{66}^{(3)} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{33}^{(1)} = \frac{E}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Elemento 2. En este caso, las derivadas de las funciones de aproximación no son constantes al variar x, y , y debido a ello el cálculo explícito de las integrales es más molesto. Simplificaremos dicho cálculo realizando una integración numérica, tal como haría cualquier programa comercial. Aproximaremos el valor de la integral por el resultado de multiplicar el valor del integrando en el punto medio del elemento por el área de éste. En esto consiste la cuadratura de Gauss de un punto (prácticamente todos los programas comerciales usan cuadraturas de Gauss superiores, de cuatro o más puntos). Las derivadas de las funciones de forma y sus valores en el punto medio del elemento, se incluyen en la siguiente tabla

	$N_2^{(2)}$		$N_3^{(2)}$		$N_4^{(2)}$		$N_5^{(2)}$	
$\partial/\partial x$	-y	-1/2	y	1/2	y-1	-1/2	y-1	1/2
$\partial/\partial y$	1-x	1/2	x	1/2	x-1	-1/2	-x	-1/2

Utilizamos esta integración aproximada para calcular las aportaciones del elemento 2:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{22}^{(2)} &= \int_V \mathbf{E} \begin{pmatrix} -y & 0 & (1-x) \\ 0 & (1-x) & -y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y & 0 \\ 0 & (1-x) \\ (1-x) & -y \end{pmatrix} dV \approx \\
&\approx \mathbf{E} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot 1 = \mathbf{E} \begin{pmatrix} 3/8 & -1/8 \\ -1/8 & 3/8 \end{pmatrix} \\
\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{23}^{(2)} &\approx \mathbf{E} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot 1 = \mathbf{E} \begin{pmatrix} -1/8 & 1/8 \\ -1/8 & 1/8 \end{pmatrix} \\
\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{24}^{(2)} &\approx \mathbf{E} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot 1 = \mathbf{E} \begin{pmatrix} 1/8 & -1/8 \\ 1/8 & -1/8 \end{pmatrix} \\
\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{25}^{(2)} &\approx \mathbf{E} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot 1 = \mathbf{E} \begin{pmatrix} -3/8 & 1/8 \\ 1/8 & -3/8 \end{pmatrix} \\
\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{33}^{(2)} &\approx \mathbf{E} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot 1 = \mathbf{E} \begin{pmatrix} 3/8 & 1/8 \\ 1/8 & 3/8 \end{pmatrix} \\
\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{34}^2 &\approx \mathbf{E} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot 1 = \mathbf{E} \begin{pmatrix} -3/8 & -1/8 \\ -1/8 & -3/8 \end{pmatrix} \\
\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{35}^2 &\approx \mathbf{E} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot 1 = \mathbf{E} \begin{pmatrix} 1/8 & 1/8 \\ -1/8 & -1/8 \end{pmatrix} \\
\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{44}^2 &\approx \mathbf{E} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot 1 = \mathbf{E} \begin{pmatrix} 3/8 & 1/8 \\ 1/8 & 3/8 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{45}^{(2)} \approx \mathbf{E} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot 1 = \mathbf{E} \begin{pmatrix} -1/8 & -1/8 \\ 1/8 & 1/8 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{55}^{(2)} \approx \mathbf{E} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot 1 = \mathbf{E} \begin{pmatrix} 3/8 & -1/8 \\ -1/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

Calcularemos a continuación el término de cargas (de fuerzas nodales equivalentes). No tenemos carga de volumen, por tanto:

$$\underline{\underline{\mathbf{f}}} = \int_s \underline{\underline{\mathbf{N}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{X}}} \cdot dS$$

Y las aportaciones elementales a cada submatriz de $\underline{\underline{\mathbf{f}}}$ son:

$$\underline{\underline{\mathbf{f}}}_i^{(e)} = \int_e \left(\underline{\underline{\mathbf{N}}}_i^{(e)} \right)^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{X}}} \cdot dS = \int_e \begin{pmatrix} \mathbf{N}_i^{(e)} \bar{\mathbf{X}}_x \\ \mathbf{N}_i^{(e)} \bar{\mathbf{X}}_y \end{pmatrix} \cdot dS$$

No vamos a considerar aquí las cargas puntuales aplicadas en los nodos, que simplemente añadiremos a la submatriz correspondiente de $\underline{\underline{\mathbf{f}}}$ en la etapa final del ensamblado. Las submatrices que vamos a calcular ahora, tipo $\underline{\underline{\mathbf{f}}}_i^{(e)}$, incluyen sólo las aportaciones de la carga distribuida. En otro orden de cosas, es de interés resaltar el hecho de que dS debe ser (es inherentemente) una cantidad positiva. Si se integrase por ejemplo en el contorno entre los nodos 5 y 6, puede seguirse el sentido 5-6 o el 6-5; en el primer caso deberíamos escribir $dS=dx_1$, y en el segundo caso $dS=-dx_1$.

Elemento 1.

Sus aportaciones son:

$$\text{para } \underline{\underline{\mathbf{f}}}_1^{(1)} : \int_{y=1}^2 \begin{pmatrix} (y-1) \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \\ (y-1) \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \end{pmatrix} \sqrt{2} dy = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}; \quad \text{para } \underline{\underline{\mathbf{f}}}_2^{(1)} : 0$$

Ya que, en la cara vertical del elemento 1, no hay carga distribuida de contorno (dijimos que de las concentradas nos ocuparíamos más tarde), mientras que en la cara oblicua es nula la función de forma $\mathbf{N}^{(1)}_2$.

$$\text{para } \underline{\underline{\mathbf{f}}}_3^{(1)} : \int_{x=0}^1 \begin{pmatrix} x \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \\ x \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \end{pmatrix} \sqrt{2} dx = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Elemento 2.

Este elemento sólo tiene un punto en el contorno con carga distribuida (el nodo 3). Con el dominio de integración reducido a un punto, y no haciéndose infinito el integrando, la integral vale cero. Por tanto no hay aportación del elemento 2 debido a la carga distribuida.

Elemento 3:

Sus aportaciones son:

$$\text{para } \underline{f}_3^{(3)} : \int_{y=0}^1 \begin{pmatrix} y \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \\ y \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \end{pmatrix} \sqrt{2} dy = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}; \quad \text{para } \underline{f}_5^{(3)} : 0$$

$$\text{para } \underline{f}_6^{(3)} : \int_{x=1}^2 \begin{pmatrix} (x-1) \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \\ (x-1) \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \end{pmatrix} \sqrt{2} dx = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Seguidamente formaremos el sistema de ecuaciones, "ensamblando" las aportaciones de cada elemento en la posición adecuada de la matriz global **K** del término de cargas **f**. Ahora es el momento de incluir las fuerzas concentradas:

$$E \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} + \frac{3}{8} & \frac{1}{4} - \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} - \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} + \frac{3}{8} & 0 - \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} & 0 + \frac{1}{8} + 0 & -\frac{3}{8} - \frac{1}{8} & \frac{1}{8} - \frac{1}{4} & \frac{1}{8} - \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} - \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} - \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} + 0 & -\frac{1}{8} - \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{3}{8} + \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{3}{8} + \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^x \\ a_1^y \\ a_2^x \\ a_2^y \\ a_3^x \\ a_3^y \\ a_4^x \\ a_4^y \\ a_5^x \\ a_5^y \\ a_6^x \\ a_6^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + F_1^x \\ -\frac{1}{2} \\ F_2^x \\ 0 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ F_4^x \\ F_4^y \\ 0 \\ F_5^y \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + F_6^y \end{pmatrix}$$

Procedemos a calcular las incógnitas de desplazamiento. Como sabemos, debemos imponer antes las condiciones de contorno en desplazamientos en para obtener un conjunto de

ecuaciones resoluble. En nuestro caso, los apoyos existentes implican que: $a_1^x = a_2^x = a_4^x = a_4^y = a_5^y = a_6^y = 0$. Llevando lo anterior al sistema de ecuaciones, obtenemos:

$$\begin{array}{c}
 \text{E} \\
 \left(\begin{array}{cccc|cccc|cc}
 \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 & & \frac{9}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\
 & & & \frac{9}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 & 0 \\
 \hline
 & & & & \frac{9}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\
 & & & & & \frac{9}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & 0 & 0 \\
 & & & & & & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\
 \hline
 & & & & & & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & \frac{9}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\
 & & & & & & & & & \frac{9}{8} & 0 & -\frac{1}{4} \\
 & & & & & & & & & & \frac{1}{2} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & \frac{1}{4}
 \end{array} \right) \begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{c}
 0 \\
 a_1^y \\
 0 \\
 a_2^y \\
 a_3^x \\
 a_3^y \\
 0 \\
 a_5^x \\
 0 \\
 a_6^x \\
 0
 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c}
 -\frac{1}{2} + F_1^x \\
 -\frac{1}{2} \\
 F_2^x \\
 0 \\
 -1 \\
 -1 \\
 F_4^x \\
 F_4^y \\
 0 \\
 F_5^y \\
 -\frac{1}{2} \\
 -\frac{1}{2} + F_6^y
 \end{array} \right)
 \end{array}
 \end{array}$$

Prescindimos de las ecuaciones que tienen incógnita en el término de carga. Con las restantes podemos calcular las incógnitas de desplazamiento:

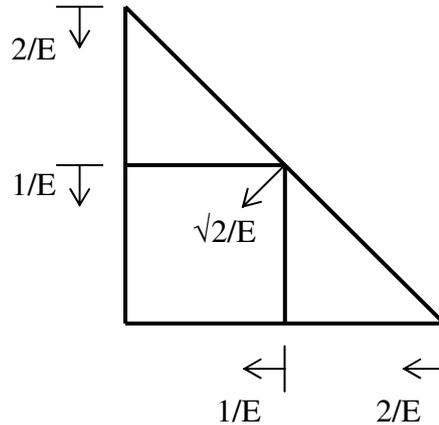
$$\begin{array}{c}
 \text{E} \\
 \left(\begin{array}{cccc|cccc}
 \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{9}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\
 & & \frac{9}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & \frac{9}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \frac{9}{8} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
 & & & & & \frac{1}{2} & 0 & 0
 \end{array} \right) \begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{c}
 a_1^y \\
 a_2^y \\
 a_3^x \\
 a_3^y \\
 a_5^x \\
 a_6^x
 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c}
 -\frac{1}{2} \\
 0 \\
 -1 \\
 -1 \\
 0 \\
 -\frac{1}{2}
 \end{array} \right)
 \end{array}
 \end{array}$$

Este sistema de ecuaciones tiene la siguiente solución, que se ilustra gráficamente en la figura 7.19::

$$a_1^y = -2/E \quad a_2^y = -1/E \quad a_3^x = -1/E \quad a_3^y = -1/E \quad a_5^x = -1/E \quad a_6^x = -2/E$$

Figura 7.19.- Desplazamientos de los nodos de la discretización.

Una vez conocidos los desplazamientos de los nodos, las ecuaciones que en su momento no



utilizamos nos permiten determinar el valor de las reacciones en los apoyos. Esta operación no requiere más que simple sustitución de valores, no la resolución de ningún sistema de ecuaciones. El resultado es:

$$F_1^x = \frac{1}{2}; \quad F_2^x = 1; \quad F_4^x = \frac{1}{2}; \quad F_4^y = \frac{1}{2}; \quad F_5^y = 1; \quad F_6^y = \frac{1}{2}$$

Finalmente vamos a ver que en este problema es posible, excepcionalmente, saber la solución exacta por simple inspección, y vamos a comparar dicha solución exacta con la obtenida mediante la aproximación.

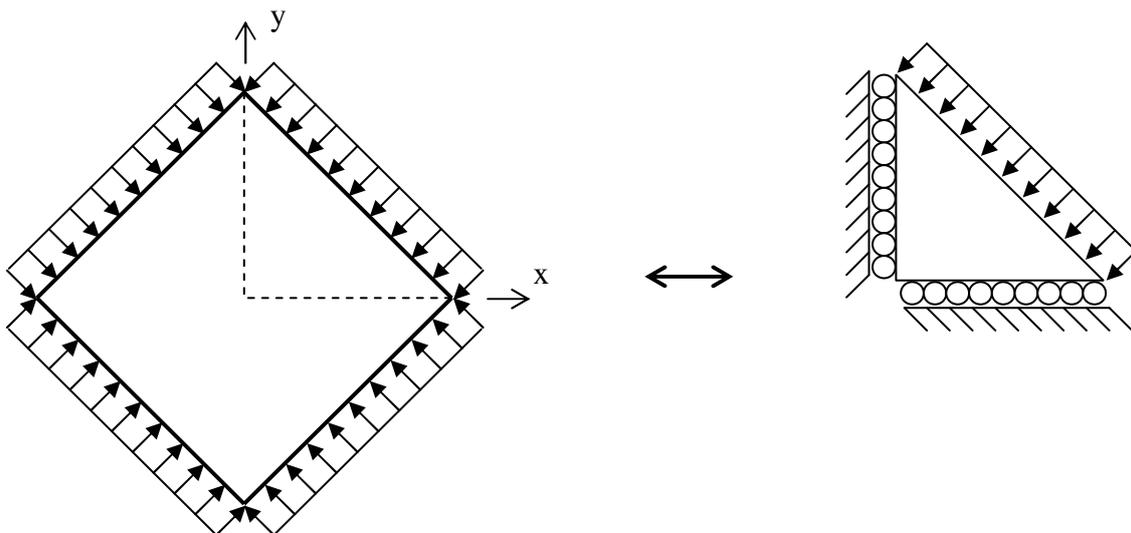


Figura 7.20.- Problema equivalente.

En efecto, apréciase que la configuración analizada sería la que resultaría de aplicar al problema de la figura 7.20 las condiciones de simetría respecto de ambos ejes coordenados. Es fácil apreciar que en dicho problema ocurre un estado uniforme de compresión hidrostática

de valor p , por lo que cualquier dirección presenta la misma deformación (el círculo de Mohr en cualquier punto del sólido, se reduce a un punto). Así, para la dirección x , al igual que para cualquier otra dirección, la deformación longitudinal es constante, y el campo de desplazamientos lineal:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \quad ; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) \quad ; \quad \nu = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\frac{p}{E}$$

Las condiciones de sustentación de nuestro problema original implican que el origen no se mueve ni gira, por lo que el movimiento de cualquier punto será proporcional a la distancia al origen (con factor de proporcionalidad p/E), y estará dirigido precisamente hacia el origen. Se comprueba inmediatamente que nuestra aproximación por Elementos Finitos ha alcanzado esa solución "exacta". Esto ha sido así en este caso porque las funciones de forma empleadas son capaces de representar el estado de deformación que constituye la solución exacta del problema (desplazamiento lineal, deformación constante).

Si se desea calcular el desplazamiento de un punto no nodal, recordemos que sólo hay que acudir a la expresión inicial $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{a}$. Sólo habrá que considerar las funciones de forma que no se anulen en el punto en el que se desea calcular el desplazamiento, es decir, aquellas del elemento en que se encuentra el punto. Así por ejemplo, si está dentro del elemento 1 tendremos:

$$\underline{\mathbf{u}}(x, y) = \begin{pmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1^{(1)}a_1^x + N_2^{(1)}a_2^x + N_3^{(1)}a_3^x \\ N_1^{(1)}a_1^y + N_2^{(1)}a_2^y + N_3^{(1)}a_3^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x/E \\ -y/E \end{pmatrix}$$

El campo de deformaciones dentro de cada elemento se obtiene fácilmente por derivación del campo de movimientos mediante la fórmula $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\mathbf{L}}}\underline{\mathbf{u}}$, y el campo de tensiones a partir del de deformaciones mediante la ley de comportamiento, $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$.

Bibliografía:

ZIENKIEWICZ, O.C., "El método de los Elementos Finitos", Ed. Reverté
 RAO, S.S. "The Finite Element Method in Engineering", Ed. Pergamon Press
 HINTON & OWEN, "Finite Element Programming", Academic Press
 PARIS, F., "Teoría de la Elasticidad", ETSII-Univ. Sevilla