

Capítulo 6

Estados elásticos bidimensionales.

Existe un gran número de problemas elásticos cuya solución puede ser descrita con aproximación razonable involucrando sólo a las componentes de desplazamiento, tensión y deformación que son visibles en la proyección del sólido sobre un plano. El conjunto de circunstancias que deben concurrir para que este tipo de simplificación sea factible, así como algunos métodos de análisis típicos para este tipo de problemas, constituyen el objeto de estudio de este capítulo.

6.1.- Introducción.

La realidad física en que nos desenvolvemos es tridimensional, y todos los problemas de mecánica de sólidos son, en rigor, tridimensionales. No obstante, en muchas ocasiones es posible obtener una solución *aproximada*, útil desde el punto de vista práctico, en función solamente de las componentes de desplazamiento en un plano, digamos u_1 y u_2 , y de las correspondientes componentes de deformación, ϵ_{11} , ϵ_{12} , ϵ_{22} , y de tensión, σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} . Cuando esto es posible, tenemos como primera ventaja la simplificación operativa en la resolución del problema que corresponde a la reducción del número de dimensiones del mismo. Como segunda ventaja, encontraremos que es posible aplicar ciertas técnicas particulares de solución, válidas sólo para problemas bidimensionales. Estas técnicas son por una parte la basada en la "Función de Airy", que presentaremos más tarde en este capítulo, y por otra parte las técnicas de variable compleja, de desarrollo más reciente. Estas últimas técnicas no serán tratadas aquí, recomendándose al lector interesado que consulte la referencia original de N. Muskhelishvili, en la que dichas técnicas fueron presentadas por primera vez. La primera edición en ruso de este texto data de 1933, habiendo sido editado posteriormente en inglés (referencia que figura al final del capítulo).

Al estudiar los estados elásticos bidimensionales debe tenerse presente, como idea de fondo, que una representación bidimensional de un problema es casi siempre una aproximación a un comportamiento que realmente es tridimensional. En los epígrafes siguientes enunciaremos las condiciones teóricas que deben darse para que la representación bidimensional de un problema sea aceptable, o eventualmente exacta (desde el punto de vista del modelo elástico tridimensional). La aproximación que consigamos será tanto mejor cuanto más se ajuste la configuración del problema a las condiciones teóricas que enunciaremos.

6.2.- Estado de deformación plana.

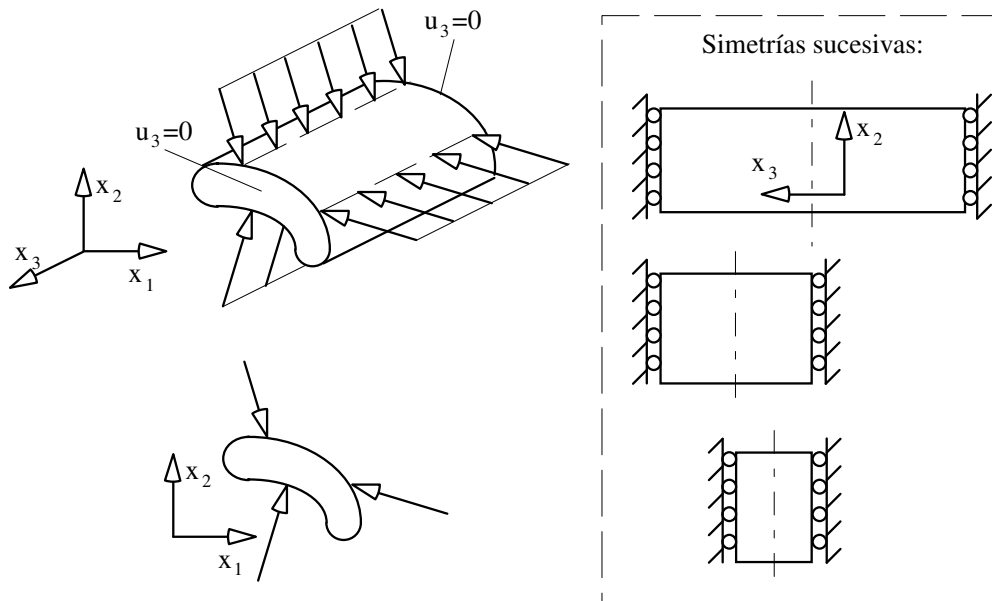
Comenzaremos enunciando las condiciones que definen desde el punto de vista matemático el estado de deformación plana (abreviadamente D.P.). Decimos que se presenta estado de deformación plana en el plano 1-2 si se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} u_3 &\equiv 0 \\ u_1 &= u_1(x_1, x_2) \\ u_2 &= u_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Es decir, si en todos los puntos del sólido el movimiento en dirección 3 es nulo, y además los movimientos u_1 y u_2 no dependen de la coordenada x_3 . Para analizar en qué situaciones es razonable adoptar la hipótesis de D.P., reparemos en que la condición $u_3=0$ implica que los planos $x_3=\text{cte}$ del sólido permanecerán planos tras la deformación, y sus puntos se mantendrán en su plano inicial. Por otra parte, de (6.1) se deduce que $u_{1,3}=u_{3,1}=u_{2,3}=u_{3,2}=0$. Por tanto:

$$\epsilon_{33}=\epsilon_{13}=\epsilon_{23}=0 ; \quad \sigma_{13}=\sigma_{23}=0.$$

Luego los planos $x_3=\text{cte}$ tienen tensión tangencial nula. En ciertos problemas, por ejemplo en el de la figura 6.1, un razonamiento de simetrías sucesivas permite asegurar que cualquier plano $x_3=\text{cte}$ tendrá tensión tangencial nula y se moverá en su plano.



Figuras 6.1.- Identificación del estado de deformación plana.

Las figuras representan un sólido prismático, cuya geometría se obtiene como desarrollo a lo largo de una porción del eje x_3 de una superficie en el plano $x_1 x_2$, que llamamos sección del prisma. Las cargas aplicadas son perpendiculares a x_3 , y se mantienen constantes a lo largo de x_3 , como indican las figuras de la izquierda. Además, las secciones extremas tienen impedido el desplazamiento u_3 , como indican las figuras de la

derecha. El plano de simetría geométrica es claramente también un plano de simetría del problema elástico, como indica la primera figura de la derecha (en estas figuras no se representa la carga por claridad). Por tanto podemos analizar solamente una mitad del sólido haciendo uso de lo expuesto en el epígrafe 5.9. El problema se transforma así en el representado en la segunda figura del recuadro derecho. Pero en esta última, también hay simetría de geometría y condiciones de contorno, siendo posible a su vez considerar sólo medio sólido, como se indica en la tercera figura. Procediendo sucesivamente, se llega a la conclusión de que cualquier plano $x_3 = \text{cte}$ es plano de simetría de un cierto problema (que es una cierta porción del problema original), por lo que sus puntos se moverán sin salirse del plano inicial, y en todos estos planos la tensión tangencial será nula. Por otra parte el razonamiento de simetrías sucesivas evidencia que los desplazamientos u_1 y u_2 no dependerán de x_3 , puesto que dos porciones arbitrarias de igual longitud (limitadas por dos planos $x_3 = \text{cte}$ en los que u_3 está impedido) constituyen exactamente el mismo problema elástico. Por lo tanto, el problema de las figuras 6.1 contiene un conjunto de condiciones suficientes para que la hipótesis de D.P. resulte rigurosamente correcta. Resumimos a continuación este conjunto de condiciones:

- a) El sólido tiene geometría de prisma recto, de sección arbitraria.
 - b) Los extremos planos del prisma tienen impedido el desplazamiento normal al plano, pero no tienen impedido su desplazamiento en el propio plano.
 - c) Las cargas tienen componente nula según el eje del prisma.
 - d) Las cargas no varían en la dirección del eje del prisma.
- (6.2)

Comentario: Página: 3
e6b

"Las cargas" referidas en c) excluyen evidentemente la tensión normal en los extremos planos del prisma. Esta tensión existirá debido a la restricción del movimiento en esos extremos. Como se ha mostrado, las condiciones (6.2) son suficientes para que se dé exactamente un estado de deformación plana. No hemos demostrado que estas condiciones sean necesarias, por lo que teóricamente podrían darse estados de D.P. fuera de las pautas (6.2) anteriores, por ejemplo en un sólido no prismático bajo un extraño sistema de cargas. Esta posibilidad no es realista. Por otra parte, si el sólido es prismático (condición a)), las condiciones b) c) y d) son también necesarias (además de suficientes) para que exista estado de D.P. La justificación de la última afirmación se presentará al estudiar las ecuaciones de equilibrio, en este mismo epígrafe. El lector encontrará también en el resto de este epígrafe las ideas clave para identificar de modo seguro si un problema es analizable razonablemente bajo hipótesis de deformación plana, o no lo es.

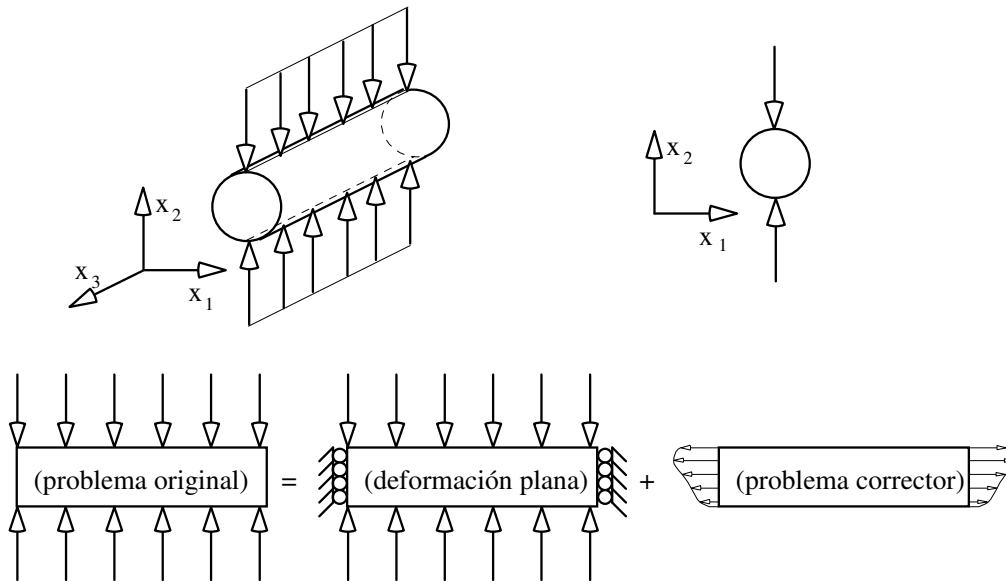
La solución correctora.

Entre las condiciones (6.2), la menos frecuente en problemas reales es que el prisma esté entre dos paredes absolutamente rígidas con las que mantiene contacto sin fricción. Afortunadamente, la solución de D.P. puede ser usada como aproximación cuando la longitud del prisma es grande comparada con las dimensiones transversales del mismo, cualesquiera que sean las condiciones en los extremos.

Un argumento frecuentemente presentado en la literatura en favor de lo anterior consiste en plantear la similitud con el caso límite de un prisma de longitud infinita. En ese caso, todas las secciones serían de simetría (ya que cada una tendría infinito sólido a

su derecha e infinito sólido a su izquierda), lo que al menos asegura que las secciones permanecen planas. Esto sería aproximadamente extrapolable a una cierta porción central de un prisma largo aunque no infinito. Sin embargo, el considerar un prisma de longitud infinita no aclara realmente la cuestión de las condiciones de contorno en los extremos, ya que de una u otra manera se han de considerar algunas "condiciones de contorno en el infinito".

Un enfoque mucho menos equívoco consiste en plantear la solución del problema original como superposición de un problema de deformación plana, más otro problema definido adecuadamente para que añada o quite del anterior las cargas oportunas, de forma que la superposición constituya el problema original. Llamamos solución correctora a la solución de este problema definido con el propósito de añadir al problema de D.P. lo necesario para reproducir nuestro problema original. Lo más frecuente en la práctica es que los extremos del prisma estén libres de acciones, lo que supondremos para fijar ideas, si bien la conclusión fundamental que obtendremos no se verá afectada por la presencia de otro tipo de condiciones en los extremos. La figura 6.2 muestra el caso de un problema que se ajusta a las condiciones de D.P., excepto a la relativa a los extremos del prisma. Se trata de un cilindro comprimido por un diámetro, y sin tensiones en las superficies extremas, que podría representar el rodillo de un cojinete. La solución correctora debe tener tensión nula en la superficie cilíndrica, y tensiones normales en los extremos planos de valor igual pero de sentido contrario a las que aparecen en el problema de deformación plana. La última de las figuras 6.2 representa un problema corrector *típico*, que no pretende ilustrar el ejemplo planteado en particular.



Figuras 6.2.- Definición de la solución correctora.

Un procedimiento riguroso de solución sería resolver el problema de D.P. (solución 1), tomar las tensiones σ_{33} encontradas, cambiarlas de signo para formular el problema corrector, resolver este último (solución 2) y superponer ambas soluciones (las referidas 1 y 2). Desafortunadamente, salvo en casos muy particulares la obtención de la solución correctora de forma rigurosa constituye un problema tridimensional complicado, en

general sin expresión analítica cerrada. Para obviar esta desventaja, podemos considerar una solución correctora aproximada, con distribuciones lineales de tensiones σ_{33} en los extremos, de forma que su resultante y momento sean iguales a los que actúan en las caras extremas del problema corrector original. Esta aproximación se ilustra en la figura 6.3.

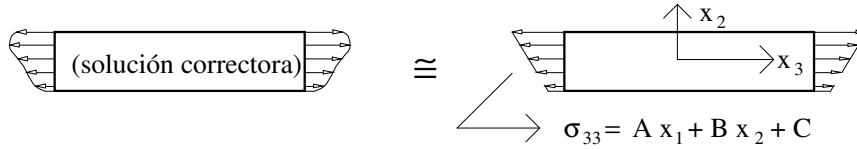


Figura 6.3.- La solución correctora aproximada.

Esta solución correctora aproximada corresponde al problema de una barra recta sometida a tracción-flexión, al que ya hicimos referencia en el contexto de la figura 5.10. Cuando la barra es larga, y en virtud del principio de Saint-Venant, esperamos que la solución de este problema sea una buena aproximación de la solución correctora, salvo en zonas cercanas a los extremos de la barra. La resolución de este problema corrector aproximado puede plantearse en el contexto de la Teoría de la Elasticidad, como un genuino problema tridimensional. Los detalles se presentarán más tarde, para no difuminar ahora la línea de razonamiento. La solución de tensiones tiene la forma (en todos los puntos del sólido):

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= A x_1 + B x_2 + C \\ \sigma_{11} &= \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0\end{aligned}$$

Es decir, sólo es distinta de cero σ_{33} . Las deformaciones transversales son nulas, pero no así las longitudinales (ϵ_{11} , ϵ_{22} , ϵ_{33}). La solución de desplazamientos tiene las tres componentes no nulas. De lo anterior se deriva la siguiente conclusión de interés:

En el nivel de precisión que se alcanza usando la solución correctora aproximada, las componentes de tensión σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} , que obtenemos resolviendo el problema de deformación plana son ya las correspondientes al problema original.

En el problema original, con los extremos del prisma libres, estas componentes de tensión serán evidentemente mucho mayores que σ_{33} , por lo que cualquier cálculo relativo a la plastificación del material puede realizarse con error despreciable utilizando solamente las componentes σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} , obtenidas del análisis de D.P. La situación es muy distinta si los extremos del prisma tienen impedido el desplazamiento normal (el problema original sería precisamente de D.P., no necesitando solución correctora). En este caso la condición $\epsilon_{33}=0$ conduce a $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$, que puede ser del mismo orden que σ_{11} y σ_{22} , no siendo razonable prescindir de ella.

Por otra parte, las componentes de desplazamiento obtenidas en el análisis de D.P. (u_1 y u_2) no coincidirán con las del problema original, puesto que los desplazamientos de la solución correctora no son nulos. Interesa saber hasta qué punto la solución correctora supone correcciones substanciales al campo de desplazamientos

correspondiente a D.P. En el apartado siguiente se presenta la solución elástica del problema corrector aproximado. No obstante, es posible conformarse con la solución correctora proporcionada para flexión-tracción por la Resistencia de Materiales (que es una buena aproximación). En este modelo el movimiento de la sección es un movimiento como sólido rígido, por lo que los desplazamientos u_1 , u_2 , obtenidos con D.P. tendrían asociado el error correspondiente a ese movimiento como sólido rígido. Este tipo de error carece de importancia en muchas situaciones. Seguidamente veremos que en rigor el movimiento de una sección no es exactamente un movimiento como sólido rígido, lo que implica discrepancias adicionales entre los campos de desplazamientos de deformación plana y del problema original.

La solución correctora aproximada: El problema de tracción-flexión.

Como se indicó en las figuras 6.2 y 6.3, el problema corrector tendrá aplicadas unas ciertas tensiones normales en los extremos de la barra prismática. En el problema corrector aproximado las tensiones normales se sustituyen por otras de evolución lineal en la sección, que tengan la misma resultante y momento (respecto de cualquier punto). Por simplicidad algebraica, elegimos los ejes de forma que x_2 tenga la dirección del momento, con lo que visto en el plano 1-3 el problema tiene el aspecto mostrado en la figura 6.4.

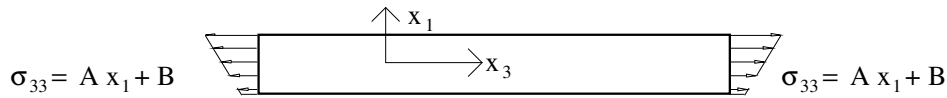


Figura 6.4.- El problema corrector aproximado.

Para obtener la solución elástica del problema, supongamos que las tensiones en el interior del sólido siguen el mismo patrón que en los contornos extremos. Si obtenemos así una solución será la correcta, en virtud del teorema de unicidad (si la suposición no fuera correcta no encontraremos una solución satisfactoria). Por tanto planteamos:

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= A x_1 + B \\ \sigma_{11} &= \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0\end{aligned}$$

en todo el sólido. La ley de comportamiento nos da la expresión de las componentes longitudinales de deformación, y mediante integración obtenemos una primera forma de las componentes de desplazamiento:

$$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_{33} = -\frac{\nu}{E} (A x_1 + B) \Rightarrow u_1 = -\frac{\nu}{E} \left(A \frac{x_1^2}{2} + B x_1 \right) + f(x_2, x_3) \\ \epsilon_{22} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_{33} = -\frac{\nu}{E} (A x_1 + B) \Rightarrow u_2 = -\frac{\nu}{E} (A x_1 + B) x_2 + f(x_1, x_3) \\ \epsilon_{33} &= \frac{1}{E} \sigma_{33} = \frac{1}{E} (A x_1 + B) \Rightarrow u_3 = \frac{1}{E} (A x_1 + B) x_3 + f(x_1, x_2)\end{aligned}$$

En donde $f(x_2, x_3)$, $f(x_1, x_3)$, $f(x_1, x_2)$, son tres funciones por determinar. Como las componentes de tensión tangencial son nulas, lo serán también las correspondientes componentes de deformación. Es decir:

$$u_{1,2} + u_{2,1} = 0 \Rightarrow f(x_2, x_3)_{,2} - \frac{\nu}{E} A x_2 + f(x_1, x_3)_{,1} = 0 \quad (6.3)$$

$$u_{1,3} + u_{3,1} = 0 \Rightarrow f(x_2, x_3)_{,3} + \frac{1}{E} A x_3 + f(x_1, x_2)_{,1} = 0 \quad (6.4)$$

$$u_{2,3} + u_{3,2} = 0 \Rightarrow f(x_1, x_3)_{,3} + f(x_1, x_2)_{,2} = 0 \quad (6.5)$$

Para que la ecuación (6.5) se satisfaga al variar los valores de las variables independientes, debe cumplirse que:

$$f(x_1, x_3)_{,3} \text{ no dependa de } x_3 \Rightarrow f(x_1, x_3) = g_1(x_1) x_3 + g_2(x_1)$$

$$f(x_1, x_2)_{,2} \text{ no dependa de } x_2 \Rightarrow f(x_1, x_2) = g_3(x_1) x_2 + g_4(x_1)$$

$$(6.5) \text{ por sí misma conduce a } g_1(x_1) = -g_3(x_1) = (\text{por simplicidad}) = g(x_1)$$

Las $g_j(x_1)$ son funciones por determinar. Con lo anterior, la ecuación (6.3) se escribe como:

$$f(x_2, x_3)_{,2} - \frac{\nu}{E} A x_2 + g'(x_1) x_3 + g'_2(x_1) = 0$$

Las primas (') denotan derivada primera respecto a la única variable de la que depende la función correspondiente. Para que la ecuación anterior se satisfaga para todo un rango de valores de x_1 y x_3 , es preciso que ni g' ni g'_2 dependan realmente de x_1 , por lo que deben ser constantes:

$$g'(x_1) = C_1 \Rightarrow g(x_1) = C_1 x_1 + C_3$$

$$g'_2(x_1) = C_2 \Rightarrow g_2(x_1) = C_2 x_1 + C_4$$

Con lo que, mediante integración, obtenemos:

$$f(x_2, x_3) = \frac{\nu A}{2E} x_2^2 - C_1 x_3 x_2 - C_2 x_2 + h_1(x_3) + C_5 \quad (6.6)$$

Similarmente, sustituyendo en la ecuación (6.4) el valor encontrado de $f(x_1, x_2)$ tenemos:

$$f(x_2, x_3)_{,3} + \frac{A}{E} x_3 - g'(x_1) x_2 + g'_4(x_1) = 0$$

Para que la ecuación anterior se satisfaga para todo un rango de valores de x_1 y x_2 , es preciso que ni g' ni g'_4 dependan realmente de x_1 , por lo que deben ser constantes:

$$g'(x_1) = \text{cte} \Rightarrow g(x_1) = \text{cte} \cdot x_1 + \text{cte} \text{ (resultado ya obtenido antes)}$$

$$g'_4(x_1) = C_6 \Rightarrow g_4(x_1) = C_6 x_1 + C_7$$

Con lo que, mediante integración, obtenemos:

$$f(x_2, x_3) = \frac{-A}{2E} x_3^2 + C_1 x_2 x_3 - C_6 x_3 + h_2(x_2) + C_8 \quad (6.7)$$

Identificando términos entre (6.6) y (6.7), encontramos:

$$h_1(x_3) = -\frac{A}{2E} x_3^2 - C_6 x_3; \quad h_2(x_1) = \frac{vA}{2E} x_2^2 - C_2 x_2; \quad C_1 = 0; \quad C_5 = C_8$$

Con la información obtenida conocemos ya las expresiones de las funciones f:

$$f(x_1, x_3) = C_3 x_3 + C_2 x_1 + C_4; \quad f(x_1, x_2) = -C_3 x_2 + C_6 x_1 + C_7$$

$$f(x_2, x_3) = \frac{-A}{2E} x_3^2 - C_6 x_3 + \frac{vA}{2E} x_2^2 - C_2 x_2 + C_5$$

Con lo que la expresión final del campo de desplazamientos es:

$$u_1 = -\frac{v}{E} \left(A \frac{x_1^2}{2} + B x_1 \right) - \frac{A}{2E} x_3^2 - C_6 x_3 + \frac{vA}{2E} x_2^2 - C_2 x_2 + C_5$$

$$u_2 = -\frac{v}{E} (A x_1 + B) x_2 + C_3 x_3 + C_2 x_1 + C_4$$

$$u_3 = \frac{1}{E} (A x_1 + B) x_3 - C_3 x_2 + C_6 x_1 + C_7 \quad (6.8)$$

La solución anterior en desplazamientos (6.8), es *la solución exacta del problema corrector aproximado*, que debe superponerse a una solución de deformación plana. A la vez, es la solución tridimensional "exacta" de un problema importante por sí mismo, cual es el de flexión-tracción de barras rectas. Esta solución contiene las seis constantes indeterminadas ($C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7$) asociadas a un movimiento arbitrario como sólido rígido, como es de esperar tratándose de una solución obtenida sólo a partir de las tensiones (o equivalentemente de las deformaciones, ver epígrafe 3.6). Puede comprobarse que si se impone desplazamiento y rotación nulos del origen de coordenadas, las seis constantes se anulan.

En el contexto en que presentamos esta solución, el mayor interés se centra en sus componentes u_1 y u_2 , que hemos de añadir a las correspondientes de la solución de D.P. para obtener las del problema original. Para una sección determinada, $x_3 = \text{cte} = x_3^0$, se aprecia que las componentes u_1 y u_2 de la solución correctora (6.8) implican algo más que un movimiento de sólido rígido, ya que contienen términos no lineales en x_1 y x_2 . En efecto, la figura 6.5 muestra el cambio de forma de la sección dado por las dos primeras ecuaciones (6.8). En el ejemplo adoptado el sólido prismático tiene sección cuadrada, y existe flexión sin tracción ($B=0$, estando el origen de coordenadas en el centro de la sección). Es inmediato comprobar (dentro de la hipótesis de pequeños desplazamientos) que los lados $x_1 = \text{cte}$ se transforman en parábolas y los lados $x_2 = \text{cte}$ permanecen rectos, con inclinación simétrica según se indica. Entiéndase que los desplazamientos de la solución correctora aproximada serían, para cada sección del

prisma los correspondientes a la figura (6.5) más un cierto movimiento como sólido rígido.

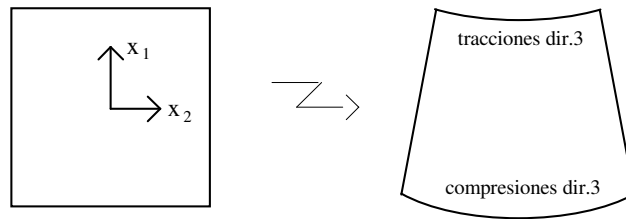


Figura 6.5.- Cambio de forma de una sección cuadrada sometida a flexión.

Aunque hemos obtenido la solución del problema de flexión-tracción de barras rectas con el objeto de utilizarla como solución correctora, la ocasión es propicia para indicar el grado de aproximación a esta solución elástica rigurosa (6.8) que se consigue al emplear las simplificaciones usuales de la Resistencia de Materiales. El lector interesado podrá comprobar que *para el caso de flexión-tracción* los siguientes resultados (y/o hipótesis) del modelo simplificado de Resistencia de Materiales resultan ser exactos (omitimos aquí los detalles por brevedad):

- El estado de tensiones.
- La deformada de la línea media (la formada por los centros de áreas de las secciones).
- El que las secciones de la barra permanecen planas tras la deformación.

Sin embargo, la hipótesis de que el movimiento de la sección sea un movimiento como sólido rígido no es exacta ni siquiera en el caso de flexión-tracción, como se mostró en la figura 6.5. En el contexto de la Resistencia de Materiales, los fenómenos de interés están muy poco afectados por la inexactitud de esta hipótesis, por lo que la misma es aceptable en dicho contexto. Por el contrario, los cambios de distancias entre puntos de la sección en su plano pueden llegar a ser relevantes cuando se trata de corregir una solución de D.P. Aunque es común que las *deformaciones de la sección* del problema corrector puedan despreciarse frente a las deformaciones de la solución de D.P. (debido a que los momentos flectores implicados suelen ser pequeños), es recomendable realizar en cada caso particular una sencilla comprobación al respecto. Como orientación, las deformaciones ϵ_{22} son del orden de 3×10^{-6} en una barra de acero de sección cuadrada, cuando las tensiones σ_{33} de flexión son próximas a la de fluencia (mucho mayores que las esperables en un problema corrector).

Ecuaciones de campo.

Lo expuesto hasta ahora en este epígrafe puede resumirse en que, a la hora de asumir la hipótesis de deformación plana en un problema, no es muy preocupante que el mismo viole las condiciones de movimiento normal nulo en los extremos del prisma, ya que podemos superponer una solución correctora aproximada que es bien conocida. En la mayoría de los casos una sencilla comprobación puede revelar que la solución correctora no modifica substancialmente la solución de deformación plana. En esos

casos la corrección resultará innecesaria. Nuestro interés se centra ahora en conseguir la propia solución de D.P., para lo que necesitamos conocer las ecuaciones de campo que rigen el comportamiento del sólido bajo las correspondientes hipótesis. Obtendremos estas ecuaciones mediante particularización de las ecuaciones generales de la elasticidad tridimensional.

-Ley de Comportamiento-

De las ecuaciones (6.1) se deduce inmediatamente que $\epsilon_{33}=\epsilon_{13}=\epsilon_{23}=0$ Haciendo nulos esos términos en la ley tridimensional de comportamiento (4.40), la misma puede escribirse sencillamente como:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda \epsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + 2G \epsilon_{\alpha\beta} \quad (6.9)$$

Donde adoptamos el convenio de que los subíndices griegos ($\alpha, \beta, \dots$) varían desde 1 hasta 2 solamente. Como sabemos, además de las componentes visibles en el plano 1-2, existe también una componente no nula de tensión, σ_{33} , la cual no está recogida en (6.9). Su valor en función de las componentes visibles en el plano se calcula fácilmente: siendo $\epsilon_{33}=0=[\sigma_{33} - \nu (\sigma_{11}+\sigma_{22})]/E$, tenemos:

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (6.10)$$

Como en el caso tridimensional, podemos expresar la ley de comportamiento de distintas formas, con las tensiones en función de las deformaciones o viceversa, y usando unas u otras constantes elásticas. Por ejemplo, utilizando la ecuación (6.10) para sustituir el valor de σ_{33} en las dos primeras ecuaciones (4.52), que son $\epsilon_{11}=[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22}+\sigma_{33})]/E$, y $\epsilon_{22}=[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{33})]/E$, obtenemos un resultado que expresado en forma compacta es:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E} [\sigma_{\alpha\beta} - \nu \sigma_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}] \quad (6.11)$$

-Ecuaciones de equilibrio-

Dado que las hipótesis de D.P. implican que ninguna componente de desplazamiento varía en la dirección 3, tampoco lo hará ninguna de las magnitudes que se obtienen mediante derivadas de los mismos (tales son las tensiones y deformaciones). Eliminando las derivadas respecto de x_3 en las dos primeras ecuaciones de equilibrio (2.9), obtenemos:

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} + X_\alpha = 0 \quad (6.12)$$

La tercera ecuación de equilibrio (2.9), $\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} + X_3 = 0$, teniendo en cuenta que $\sigma_{33,3}=0$ (por ser derivada respecto de x_3), y que también $\sigma_{31,1}=\sigma_{32,2}=0$ (por ser σ_{13} y σ_{23} idénticamente nulas, como se explicó al principio del capítulo), se reduce a $X_3=0$.

Las dos primeras ecuaciones de equilibrio en el contorno (2.8), se expresan (teniendo en cuenta que $\sigma_{13} \equiv \sigma_{23} \equiv 0$):

$$\sigma_{\alpha\beta} n_\beta = \bar{X}_\alpha \quad (6.13)$$

La tercera ecuación de equilibrio en el contorno se reduce a $\bar{X}_3 = \sigma_{33} n_3$, lo que indica que solamente puede haber tensión en el contorno en dirección 3 en los extremos planos del prisma (únicas superficies del mismo con $n_3 \neq 0$).

Hemos obtenido que $X_3 = 0$ y $\bar{X}_3 = 0$, son relaciones que deben cumplirse en el estado de D.P. (la última salvo en los extremos del prisma). Por tanto la condición c) de (6.2) es una condición no sólo suficiente, sino también necesaria para que se dé el estado de deformación plana en un sólido prismático. La condición d) es también necesaria puesto que las ecuaciones (6.1) implican que ninguna magnitud que se exprese como derivadas de los desplazamientos, en particular las cargas, pueden variar a lo largo de x_3 .

-Ecuaciones de compatibilidad y de integrabilidad-

La expresión $\epsilon_{\alpha\beta} = (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha})/2$, donde los subíndices griegos varían de 1 a 2, recoge los únicos tres términos no nulos del tensor de deformaciones. Existen tres posibles derivadas segundas involucrando a las variables x_1, x_2 , (la derivada 11, la 22, y la 12). Recuérdese que cualquier derivada respecto de x_3 será nula, y su consideración conduciría a una identidad. Derivando dos veces de las tres maneras posibles cada una de las tres ecuaciones anteriores se obtienen $3 \times 3 = 9$ ecuaciones. En estas nueve ecuaciones figurarán derivadas terceras de los desplazamientos u_1 y u_2 . Hay cuatro posibles derivadas terceras de una función (las 111, 112, 122, y 222), por lo que tendremos $4 \times 2 = 8$ funciones del tipo $u_{\alpha,\beta,\gamma\theta}$, que aparecen linealmente en las 9 ecuaciones. Si utilizamos ocho de las nueve ecuaciones para eliminar las ocho funciones, quedará $9 - 8 = 1$ ecuación, que sólo contendrá derivadas segundas de deformaciones. Esta es la ecuación de integrabilidad (solamente una) en el estado de D.P. Su forma explícita es:

$$\epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11} = 2 \epsilon_{12,12} \quad (6.14)$$

-Ecuaciones de Navier-

Dado que $u_3 \equiv 0$, y que cualquier derivada respecto de x_3 es nula, de (5.1) se tiene:

$$(\lambda + G)u_{\beta,\alpha\beta} + Gu_{\alpha,\beta\beta} + X_\alpha = 0 \quad (6.15)$$

-Ecuaciones de Michell y Beltrami-

Utilizando la ley de comportamiento para escribir la (única) ecuación de integrabilidad en función de las tensiones, y haciendo aparecer las cargas de volumen mediante la

ecuación de equilibrio correspondiente, se obtiene la (única) ecuación de Michell y Beltrami en los problemas de D.P. El resultado es:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{-1}{1-\nu} [X_{1,1} + X_{2,2}] \quad (6.16)$$

Cabe recordar que el que un campo de tensiones cumpla las ecuaciones de Michell y Beltrami no es suficiente para asegurar que dicho campo sea la solución de nuestro problema elástico, sino que debe satisfacer además las ecuaciones de equilibrio.

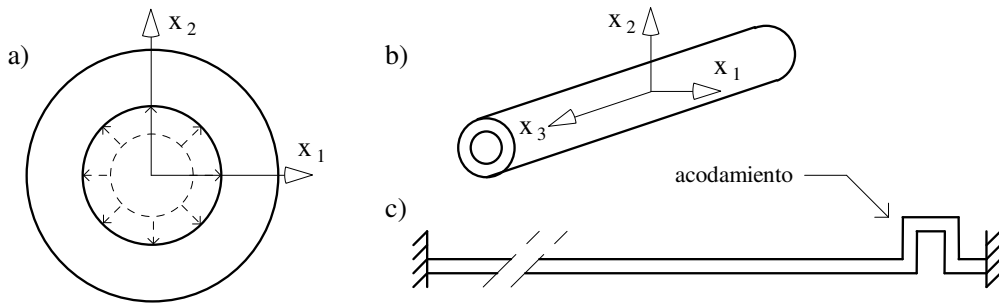
Notas sobre la aplicabilidad y el orden de magnitud del error.

Una vez que se ha identificado la posibilidad razonable de analizar un problema bajo hipótesis de D.P., los pasos a seguir son los siguientes:

1º) Obtención de la solución del problema de deformación plana, que debe satisfacer las ecuaciones de campo obtenidas en el apartado anterior. Para casos relativamente sencillos pueden emplearse enfoques de integración directa, o algún método particular que presentaremos más tarde en este capítulo. El empleo de métodos aproximados puede ser necesario en muchos casos.

2º) Cálculo de la tensión de la solución correctora ($-\sigma_{33} = -\nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ en el caso de extremos libres), y *en caso de estimarse necesario*, plantear la solución correctora aproximada y superponerla a la solución de deformación plana.

En este punto el lector está probablemente capacitado para reconocer si es o no razonable analizar un problema dado bajo hipótesis de D.P., si bien puede encontrar dificultad en evaluar *a priori* la necesidad o no de considerar la solución correctora. Como orientación en este sentido, se comentan seguidamente algunos casos particulares.

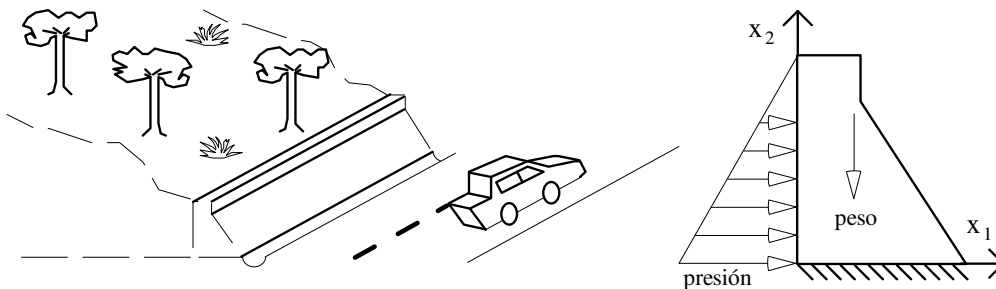


Figuras 6.6.- a) y b) Tubería a presión. c) Montaje para reducir tensiones longitudinales.

El primero y más emblemático es el caso de tuberías sometidas a presión interior y/o exterior que se ilustra en las figuras 6.6. Una tubería es habitualmente extremadamente larga comparada con su diámetro, por lo que los errores debidos a efectos de borde serán inapreciables en prácticamente toda su longitud. Cabe apuntar que muy raramente se montan tuberías rectas entre extremos rígidos, sino que incluso en los casos en que una recta sea topológicamente suficiente, suelen incluirse acodamientos

para evitar que las dilataciones térmicas produzcan grandes empujes longitudinales, y las consiguientes tensiones (figura 6.6c). En este caso las tensiones σ_{33} pueden ser despreciables en primera aproximación (existe un efecto secundario de flexión que ahora no consideramos), y la solución de D.P. ofrece ya todas las componentes de tensión relevantes. Si se quiere conocer con precisión el campo de desplazamientos, habrá necesidad de considerar la solución correctora. En este caso, por tratarse de un problema plano axisimétrico (el centro de la tubería es centro de simetría en el plano x_1 x_2), la distribución de tensiones σ_{33} de la solución correctora será equivalente a una fuerza longitudinal aplicada en el centro, siendo nulo el momento.

Como segundo ejemplo considérese un muro de contención, o una presa de gravedad, cuya forma típica se muestra en las figuras 6.7. Su función es mantener a un lado del muro o de la presa un volumen de tierra o de agua, respectivamente. El peso propio del muro es un factor clave para resistir los empujes y generalmente no puede simplificarse ni despreciarse en el análisis (en el resto de los casos comentados en esta sección suele ser razonable despreciarlo o considerar una fuerza de contorno equivalente). Las condiciones de contorno típicas constan de la presión ejercida por el medio a contener, que crece linealmente con la profundidad, y algunas condiciones en la base del muro que reproduzcan razonablemente su interacción con el terreno. Según el caso, puede ser adecuado imponer desplazamiento nulo en la base (como muestra la figura), o bien imponer algunas condiciones de contorno en tensiones que garanticen el equilibrio del muro y que sean consistentes con el tipo de interacción. Puede incluirse en el análisis la solución correctora cuando los extremos de la presa no apoyen en terreno rocoso, aunque en este tipo de aplicaciones de ingeniería civil los requerimientos de exactitud suelen dar margen más que suficiente para poder prescindir de solución correctora en todos los casos.



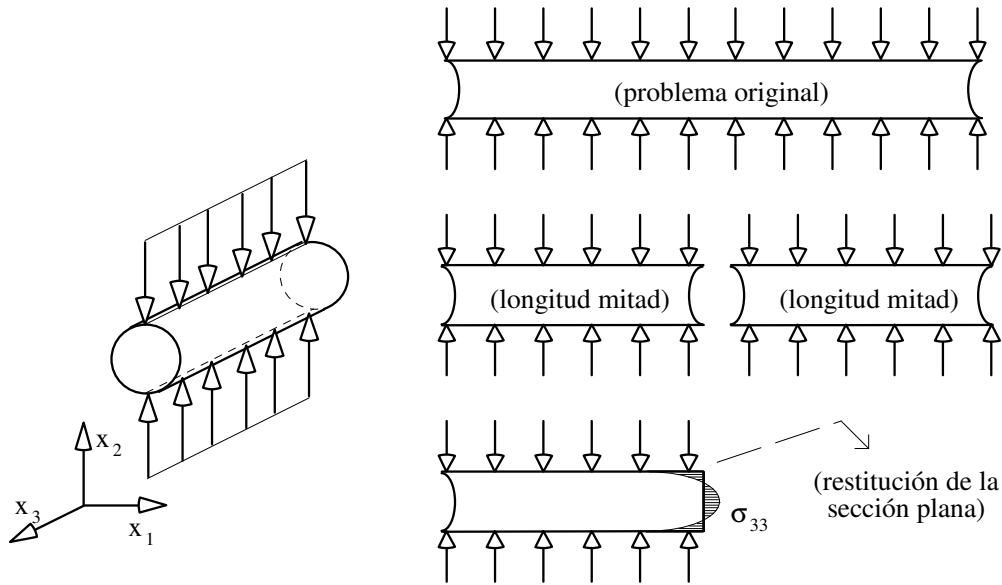
Figuras 6.7.- Presa de gravedad típica.

Otro caso típico de aplicabilidad del estado de D.P. es en cojinetes de rodillo o de aguja, utilizados para reducir el rozamiento entre elementos fuertemente comprimidos entre los que debe permitirse el deslizamiento relativo. Su configuración se mostró esquemáticamente en las figuras 6.2. Las tensiones más importantes serán las σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} , que nos proporcionará el análisis de D.P., siendo suficientemente aproximado despreciar la tensión σ_{33} para la mayoría de los propósitos prácticos. Como se apuntó en el contexto de la figura 6.2, un cálculo afinado de desplazamientos requiere la consideración de solución correctora, la cual no incluirá momentos flectores (sino únicamente tracciones axiales), debido a la simetría de geometría y cargas que se aprecia

en el plano 1-2 respecto del eje x_1 y respecto del eje x_2 . Como cabe intuir, la solución correctora aproximada supondrá un desplazamiento radial constante del contorno (hacia el interior, visto en el plano 1-2). Por tanto, el cilindro se achatará en la dirección de las cargas exteriores (ver figuras 6.2) un poco más de lo que corresponde al estado de D.P., mientras que el ensanchamiento en la dirección perpendicular será un poco menor. El analista debe juzgar en cada caso el nivel de precisión requerido en el cálculo, y decidir en consecuencia si procede o no utilizar solución correctora.

Como nota final, y pensando en el caso de extremos del prisma libres, destaquemos la evidencia de que la solución obtenida como superposición de la solución de D.P. más la solución correctora aproximada, no es rigurosamente la exacta en el contexto de la elasticidad tridimensional. En efecto, resulta claro que estamos asumiendo el error asociado a lo que sería una segunda solución correctora, correspondiente al problema con cargas en los extremos de valor la diferencia entre las del problema corrector y las del problema corrector aproximado. *La única fuente de error en un análisis de deformación plana más solución correctora aproximada, corresponde a este segundo problema corrector.* Sus cargas tendrán resultante y momento nulos en cada extremo, lo que constituye nuestra justificación para despreciar esta segunda corrección en virtud del principio de Saint-Venant, tratándose de un prisma esbelto. Si el prisma no fuera esbelto, sería más adecuado desistir del análisis de D.P., y abordar el problema como tridimensional, ya que el segundo problema corrector será en sí mismo un problema tridimensional no menos complicado que el original.

Una manera intuitiva de apreciar que el problema de extremos libres es, en rigor, de naturaleza tridimensional es razonando sobre las tensiones σ_{33} . Consideremos nuevamente como ejemplo el problema del rodillo comprimido por un diámetro, figuras 6.2, que se reproduce por comodidad en la primera de las figuras 6.8. Imaginemos el rodillo dividido físicamente en dos mitades independientes, y observemos en el plano 2-3 la configuración deformada. Como las zonas extremas del diámetro vertical son las más comprimidas, tendrán la mayor deformación ϵ_{33} , resultando las secciones extremas con la forma indicada (esta explicación es cualitativa y la figura no refleja todos los detalles: no se piense por ejemplo que u_3 deba ser constante en las líneas $x_2 = \text{cte}$ de una sección). Se revierte al problema original restableciendo la continuidad en la sección imaginaria. Para ello deben aparecer tensiones σ_{33} de compresión en los extremos del diámetro vertical, y de tracción en su zona central, que devuelvan a la sección su geometría plana (debe ser plana porque dicha sección está en un plano de simetría del problema completo; por otra parte debe haber tensiones de tracción y de compresión porque las tensiones σ_{33} deben ser autoequilibradas en la sección, para que cada mitad de sólido pueda estar en equilibrio). Con este razonamiento llegamos a la conclusión de que en la sección central existirán tensiones σ_{33} con una distribución del tipo a la indicada en la última figura 6.8, mientras que en las secciones extremas será σ_{33} idénticamente nula por condición de contorno. Por tanto la tensión σ_{33} debe variar con x_3 , lo que pone de manifiesto que cualquier descripción del estado de tensiones en función de sólo x_1 y x_2 (como la que consigue una solución de D.P. más solución correctora aproximada) será inexacta. Adicionalmente, al ser $\sigma_{33,3}$ distinto de cero, la tercera ecuación de equilibrio interno ($\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} = 0$, en ausencia de fuerzas de volumen) implica la presencia de tensiones σ_{31} y σ_{32} no nulas.



Figuras 6.8.- Evidencia de la tridimensionalidad del problema con extremos libres.

Pretendemos finalmente obtener una orientación de validez general acerca del orden de magnitud de los términos de la solución correctora aproximada. Es posible extraer dicha orientación general mediante el análisis de un caso particular. Consideremos por ejemplo el problema de *deformación plana* mostrado en la primera figura 6.9, cuya solución analítica podemos obtener. Más tarde corregiremos esta solución de D.P. para conseguir que no haya tensiones en las caras extremas del prisma. Para obtener la solución de D.P. partimos de la hipótesis de que en todo el dominio (no sólo en los contornos verticales) existe el siguiente estado de tensiones:

$$\sigma_{22} = x_1/a ; \quad \sigma_{11} = \sigma_{12} = 0; \quad (\Rightarrow \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \nu \frac{x_1}{a})$$

Mediante integración directa, se obtiene la siguiente solución de desplazamientos:

$$u_1 = \frac{-\nu(1+\nu)}{E} \frac{x_1^2}{2a} - \frac{(1+\nu)(1-\nu)}{E} \frac{x_2^2}{2a} + (C_1 x_2 + C_2)$$

$$u_2 = \frac{(1+\nu)(1-\nu)}{E} \frac{x_1 x_2}{a} + (-C_1 x_1 + C_3)$$

Las constantes C_1, C_2, C_3 , corresponden a un posible movimiento como sólido rígido en el plano 1-2. Si el origen de coordenadas no se mueve ni gira, resulta $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, lo que supondremos para fijar ideas. El hecho de que se obtenga una solución ("la solución", única en virtud del teorema de unicidad) sin violar ninguna de las ecuaciones de campo, indica que la hipótesis inicial acerca del estado de tensiones es correcta.

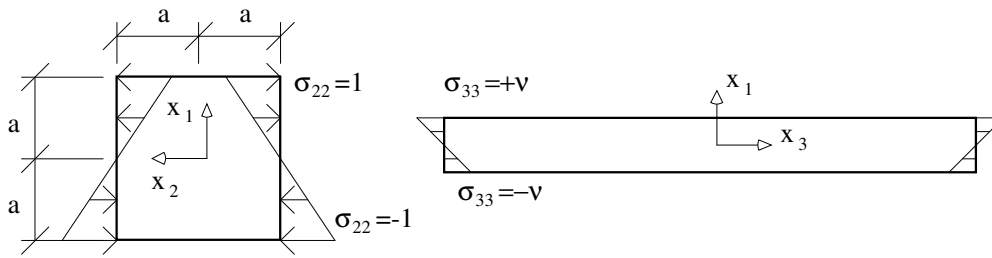


Figura 6.9.- Ejemplo particular: tensiones en deformación plana.

Nos ocuparemos ahora de la solución correctora, que corresponderá al problema de la barra sometida en sus extremos a unas tensiones opuestas a las que aparecen en la solución de D.P. (es decir, opuestas a las de la segunda figura 6.9,):

$$\sigma_{33} = -v \frac{x_1}{a}$$

La solución correctora dada por (6.8) se ajusta *exactamente* a este caso particular, dado que la distribución de tensiones σ_{33} es exactamente lineal. Manteniendo el hecho de que el centro de la barra (0,0,0) no se mueve, y que su entorno no gira, los desplazamientos de la solución correctora son:

$$u_1 = \frac{v^2}{2aE} x_1^2 - \frac{v}{2aE} x_3^2 - \frac{v^2}{2aE} x_2^2 ; \quad u_2 = \frac{v^2}{aE} x_1 x_2 ; \quad u_3 = \frac{-v}{aE} x_1 x_3$$

Resumamos las conclusiones que se desprenden de este ejemplo. Para problemas con extremos libres, y siendo respectivamente $O(\sigma)$ y $O(u)$ el orden de magnitud de las mayores tensiones y desplazamientos obtenidas con las ecuaciones de D.P. (en el plano 1-2), tenemos que:

- Las tensiones (σ_{33}) de la solución correctora aproximada son de orden $vO(\sigma)$.
- La solución correctora contiene desplazamientos u_1 y u_2 , que en general tendrán términos cuadráticos dependientes de x_1 , x_2 , y de x_3 . Los términos que dependen de x_1 y/o de x_2 son de orden $v^2 O(u)$. Los términos que dependen de x_3 pueden ser arbitrariamente grandes (ya que la cota x_3 también puede serlo). Su orden de magnitud es $vO(u)O(x_3^2/x_1^2)$.
- La solución correctora aproximada también contiene desplazamiento u_3 , que en general constará de términos cuadráticos tipo $x_1 x_3$ y $x_2 x_3$. Su orden de magnitud será $vO(u)O(x_3/x_1)$.

Como se hizo notar anteriormente, la "solución correctora aproximada" (6.8) resulta ser exacta en este caso particular, y su superposición a la solución de D.P. conduce a la solución exacta. En un problema más general, existiría el error asociado a una segunda solución correctora con tensiones σ_{33} autoequilibradas en las secciones. El orden de estas tensiones es, *en los extremos*, el de la diferencia entre la distribución (lineal) de la solución correctora aproximada, y la distribución de σ_{33} obtenida en el análisis de D.P. (cambiada de signo). Usualmente, las tensiones asociadas a esta segunda solución

correctora son muy pequeñas, y además decrecen rápidamente con la distancia a los extremos de la barra, quedando confinadas a longitudes del orden del de la sección junto a esos extremos. En el capítulo sexto del texto de Barber se estudian estas tensiones. Es oportuno hacer notar que existen casos especiales en los que dichas tensiones no decaen rápidamente, pudiendo extenderse a longitudes importantes de la barra. Existe mayor propensión a que esto suceda cuando la sección es muy poco maciza (secciones de pared delgada, especialmente si no forman una figura cerrada), como el lector podrá identificar al estudiar la torsión no uniforme en Resistencia de Materiales.

6.3.- Estado de tensión plana.

Decimos que en un sólido se presenta estado de tensión plana (abreviadamente T.P.) en el plano 1-2, si las tensiones, y en consecuencia las deformaciones, no dependen de la coordenada x_3 , y además se satisface en todos los puntos que:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \quad (6.17)$$

Como se justificará en los apartados siguientes, la situación anterior ocurre *aproximadamente* cuando el sólido es una placa plana de pequeño espesor $2h$, limitada por los planos $x_3 = -h$ y $x_3 = +h$ como indica la figura 6.10, en la que las cargas de volumen y de superficie satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} X_3 &= 0 \text{ en el dominio} \\ \bar{X}_1 = \bar{X}_2 = \bar{X}_3 &= 0 \text{ en los contornos } x_3 = \pm h \\ \bar{X}_3 &= 0 \text{ en el borde de la placa (de } n_3 = 0). \end{aligned} \quad (6.18)$$

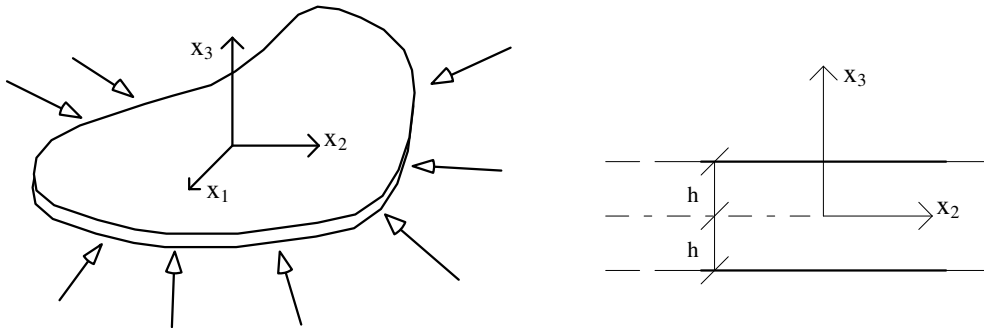


Figura 6.10.- Ejemplo típico de tensión plana.

Incompatibilidad de las hipótesis de tensión plana.

El estado de T.P. debe entenderse como una aproximación: generalmente existirá cierta discrepancia con la solución elástica tridimensional, incluso cuando se satisfacen todas las premisas enunciadas anteriormente. Nótese que no ocurre lo mismo en el estado de deformación plana, el cual proporciona la solución tridimensional exacta si se satisfacen las premisas correspondientes (sin olvidar la de desplazamiento normal nulo de los extremos). Mostraremos seguidamente que las hipótesis de T.P. no son en rigor consistentes, porque en general no puede existir solución elástica bajo dichas hipótesis. Sin embargo, la solución de T.P. tiende asintóticamente al estado de tensiones "exacto" cuando el espesor de la placa tiende a cero, proporcionando soluciones de buena aproximación en muchas aplicaciones prácticas.

Se aprecia inmediatamente que el cumplimiento de las condiciones (6.17) implicaría $\epsilon_{13}=\epsilon_{23}=0$, y la independencia de las deformaciones respecto de x_3 implicaría que cualquier derivada suya respecto de x_3 fuese nula. Con esto, las ecuaciones de integrabilidad (3.34), escritas en el mismo orden para facilitar su identificación, se reducen a:

$$\begin{array}{ll} 0 + 0 = 0 + 0 & (\text{identidad}) \\ 0 + 0 = 0 + 0 & (\text{identidad}) \\ \epsilon_{33,12} = 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 2\epsilon_{12,12} = \epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11} \\ 0 = \epsilon_{33,22} \\ 0 = \epsilon_{33,11} \end{array}$$

Vemos que todas las derivadas segundas de ϵ_{33} en el plano 1-2 serían nulas, por lo que ϵ_{33} debiera ser una función lineal de x_1 y x_2 . Pero la condición (6.17) $\sigma_{33}=0$, a través de la ley de comportamiento, implica que:

$$\epsilon_{33} = \frac{-\lambda}{\lambda + 2G} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) = \frac{-\lambda}{2G(3\lambda + 2G)} (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Por lo tanto la magnitud $(\epsilon_{11}+\epsilon_{22})$, o equivalentemente $(\sigma_{11}+\sigma_{22})$, debiera ser una función lineal de x_1 y x_2 para que las hipótesis fuesen consistentes. Es evidente que esto no tiene porqué ocurrir en un caso general (por ejemplo considérese $\sigma_{11}=x_2^2$, $\sigma_{22}=-x_1^2$, $\sigma_{12}=0$, que es compatible con las ecuaciones de campo para tensión plana, que enumeraremos más tarde). En consecuencia, *la solución de tensión plana será exacta sólo en ciertos casos muy particulares*: aquellos en que $(\sigma_{11}+\sigma_{22})$ resulte ser lineal.

Merece la pena resaltar la siguiente coincidencia relativa a la posibilidad de obtener la solución exacta en problemas de D.P. con extremos libres, y de T.P.:

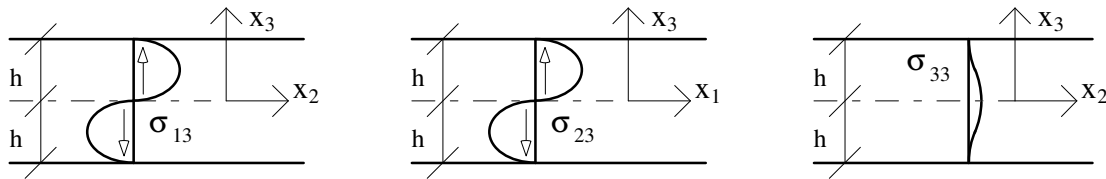
Problema: prisma muy largo (barra) con extremos libres, cargas tipo D.P.
Solución: superposición de deformación plana y "solución correctora aproximada"

Problema: de prisma muy corto (placa) con cargas sólo en los bordes, tipo T.P.
Solución: tensión plana.

La solución es exacta si $(\sigma_{11}+\sigma_{22})$ es lineal en x_1 y x_2 .	La solución es exacta si $(\sigma_{11}+\sigma_{22})$ es lineal en x_1 y x_2 .
---	---

Se obtiene la solución exacta si se da *precisamente la misma circunstancia* en ambos casos. Por supuesto, existe una razón que explica esta coincidencia: siendo $(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ lineal, al descargar las caras del prisma largo usando la solución correctora estamos haciendo $\sigma_{33} \equiv 0$ también en el interior del prisma, por lo que la solución obtenida por superposición satisface las hipótesis de T.P. (es por tanto la solución que habríamos obtenido mediante T.P.), y además es exacta, como se mostró en su momento. De aquí la "coincidencia" mencionada.

Seguidamente profundizaremos algo más en la inconsistencia de las hipótesis de T.P. a partir de condiciones de simetría. En la figura 6.10 se aprecia que el plano 1-2 es plano de simetría del problema, al menos en tensiones. Para satisfacer esta simetría (recordar figura 5.7 del epígrafe 5.9), la componente de tensión tangencial σ_{13} será del mismo valor y signo contrario en puntos simétricos, y lo mismo ocurrirá con σ_{23} , es decir: $\sigma_{13}(x_1, x_2, x_3) = -\sigma_{13}(x_1, x_2, -x_3)$; $\sigma_{23}(x_1, x_2, x_3) = -\sigma_{23}(x_1, x_2, -x_3)$. Por otra parte, no se aplican acciones sobre las caras de la placa ($x_3 = \pm h$), por lo que σ_{13} , σ_{23} , y σ_{33} serán nulas en $x_3 = \pm h$. Las dos primeras figuras 6.11 muestran la distribución tipo de tensiones σ_{13} y σ_{23} que cumplen las condiciones anteriores.



Figuras 6.11.- Distribuciones típicas de σ_{13} , σ_{23} , y σ_{33} en estado de tensión plana.

En cuanto a σ_{33} , será nula en $x_3 = \pm h$ por condición de contorno, cumplirá la condición de simetría $\sigma_{33}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_{33}(x_1, x_2, -x_3)$, y además su derivada respecto a x_3 será nula en $x_3 = \pm h$. Para ver esto último, consideremos la tercera ecuación de equilibrio, $\sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} + \sigma_{33,3} = 0$ (puesto que es $X_3 = 0$). En puntos de las superficies $x_3 = \pm h$, σ_{13} y σ_{23} son constantes (nulas), y por lo tanto sus derivadas respecto de x_1 , o de x_2 , son nulas: $\sigma_{13,1} = \sigma_{23,2} = 0$. Por tanto será $\sigma_{33,3} = 0$ en puntos $x_3 = \pm h$. En definitiva, para unas coordenadas x_1, x_2 dadas, la representación gráfica de σ_{33} en el espesor de la placa será como se muestra en la tercera figura 6.11.

Recapitulando, vemos que la simetría limita la posibilidad de evolución de las tensiones en el espesor a lo mostrado en las figuras 6.11. Las tensiones σ_{13} , σ_{23} , y σ_{33} serán nulas (lo que es una posibilidad acorde con la figura), en los casos excepcionales en que $(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ sea lineal. En los demás casos serán no nulas con la forma indicada, aunque si $2h$ es muy pequeño será razonable despreciar estas tensiones. Un argumento intuitivo en este sentido es que σ_{13} y σ_{23} deben ser continuas y valer cero en los extremos y en el centro, con lo que no pueden crecer mucho en un espesor pequeño, y que σ_{33} es nula en los extremos, y su pendiente también lo es, por lo que tampoco crecerá mucho. En el epígrafe 84 del texto de Timoshenko y Goodier puede encontrarse una demostración rigurosa de que las tensiones σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} de la solución tridimensional "exacta" constan de los valores obtenidos mediante tensión plana, más otro sumando que depende de x_3 , y que tiende a cero al hacerlo h .

Debido a su naturaleza aproximada, los estudiosos de inclinación más matemática suelen encontrar poco elegante la formulación de tensión plana. Para preservar un mayor rigor formal, puede realizarse la formulación en base a valores medios en el espesor, en lugar de usar las variables originales. Por ejemplo:

$$\bar{\sigma}_{22} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_{22} dx_3$$

Se conoce como "tensión plana generalizada" a la formulación resultante de este procedimiento, la cual conduce a ecuaciones de campo idénticas a las de tensión plana, salvo que aparecen los valores medios de las variables. Por supuesto, la ganancia en cuanto a rigor es ilusoria en la práctica, a menos que podamos asegurar que las variaciones de tensión en el espesor son pequeñas, para que la tensión local sea razonablemente próxima al promedio. Esto último solo puede asegurarse si la placa es delgada, por lo que desde el punto de vista de la aplicabilidad no hay ninguna novedad.

Ecuaciones de campo.

Asumiendo las condiciones (6.17) y (6.18) de tensión plana, nos proponemos encontrar las relaciones entre las variables elásticas de subíndices 1 y 2, es decir, las representables en la proyección del problema sobre el plano de la placa. Estas relaciones serán las ecuaciones de campo a utilizar para obtener una solución bajo hipótesis de T.P.

-Ley de comportamiento-

Partiendo de la expresión (4.52) de las deformaciones en función de las tensiones, y teniendo en cuenta (6.17), tenemos sencillamente:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \sigma_{\alpha\beta} - \nu \sigma_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (6.19)$$

En donde los subíndices griegos varían entre 1 y 2. La componente ϵ_{33} será no nula en general, aunque no queda recogida en la expresión anterior. Otra posibilidad es partir de (4.40) y utilizar $\sigma_{33}=0$ para eliminar ϵ_{33} . Véase: $\sigma_{33}=\lambda e+2G\epsilon_{33}=0 \Rightarrow (\lambda+2G)\epsilon_{33}+\lambda\epsilon_{\gamma\gamma}=0 \Rightarrow \epsilon_{33}=-\epsilon_{\gamma\gamma}\lambda/(\lambda+2G) \Rightarrow e=\epsilon_{33}+\epsilon_{\gamma\gamma}=\epsilon_{\gamma\gamma}2G/(\lambda+2G)$. Llevando este valor de 'e' a (4.40), los términos de tensión que nos interesan pueden expresarse en forma compacta como:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{2\lambda G}{\lambda + 2G} \epsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + 2G \epsilon_{\alpha\beta} \quad (6.20)$$

Comparando (6.19) con (6.11), o bien (6.20) con (6.9), apreciamos que la forma de la ley de comportamiento es análoga para T.P. y para D.P., diferenciándose en los valores de los factores (constantes) que multiplican a las variables. Es posible por tanto obtener la ley de T.P. a partir de la de D.P. o viceversa mediante un cambio adecuado del valor de dichos factores. El lector debe tener presente que *el ajuste necesario depende de la pareja de constantes elásticas que se estén utilizando para describir el comportamiento del material*. Cuando se están utilizando las constantes G, ν , el ajuste a

realizar es particularmente sencillo. Utilizando (4.51) para eliminar E en favor de G y de v en (6.19) y (6.11), podemos comparar fácilmente:

$$\begin{array}{ll} \text{D.P.:} & \text{T.P.:} \\ \epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2G} \sigma_{\alpha\beta} - \frac{v}{2G} \sigma_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} & \epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2G} \sigma_{\alpha\beta} - \frac{v}{2G(1+v)} \sigma_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \end{array}$$

Vemos que si en la ley de D.P. sustituimos el valor de v por el valor v/(1+v), obtenemos la ley de T.P. Análogamente, si en la ley de T.P. sustituimos el valor de v por el valor v/(1-v), obtenemos la ley de D.P.

La utilidad de manipulaciones como la anterior radica en que si se dispone de una solución de T.P. será posible obtener la correspondiente de D.P. o viceversa, sin más que ajustar los factores oportunos (veremos que las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad son idénticas para ambos estados, por lo que ajustar la ley de comportamiento resulta suficiente). Por tanto, obtener una solución para uno u otro estado es indiferente desde el punto de vista operativo. Por ejemplo, si se dispone de una manera (típicamente un programa de ordenador) de obtener soluciones de D.P. mediante cualquier método (ya sea aproximado o capaz de proporcionar la solución analítica exacta, etc), se puede forzar (al programa) a que produzca la solución de T.P. sin más que "mentirle" acerca del valor de v. Lo anterior presupone que internamente el programa sólo utiliza G y v; en otro caso habría que modificar convenientemente las dos constantes elásticas utilizadas.

-Ecuaciones de equilibrio-

A la vista de (6.17) la particularización de las ecuaciones de equilibrio tridimensionales resulta inmediata:

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} + X_{\alpha} = 0 ; \quad \sigma_{\alpha\beta} n_{\beta} = \bar{X}_{\alpha} \quad (6.21)$$

-Ecuaciones de compatibilidad y de integrabilidad-

Las ecuaciones de compatibilidad entre deformaciones y desplazamientos para T.P. son las mismas que para D.P: $\epsilon_{\alpha\beta} = (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha})/2$. Las ecuaciones de integrabilidad han sido ya analizadas en el apartado anterior, y aquí solo resumiremos los resultados. Análogamente al caso de D.P, debe cumplirse:

$$2\epsilon_{12,12} = \epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11} \quad (6.22)$$

Además, como en tensión plana es $\epsilon_{33} \neq 0$, hay otras tres ecuaciones de integrabilidad que no son identidades: $\epsilon_{33,11} = \epsilon_{33,22} = \epsilon_{33,12} = 0$. Como vimos, estas tres ecuaciones no podrán satisfacerse exactamente en general, por lo que cuando se adopta la hipótesis de tensión plana se debe tener presente que se realiza una aproximación.

-Ecuaciones de Michell y Beltrami-

En tensión plana, al igual que en D.P, sólo habrá una ecuación de Michell y Beltrami, que es la de integrabilidad (6.22) escrita en función de las tensiones, y con algunos términos retocados mediante de las ecuaciones de equilibrio para hacer aparecer las fuerzas de volumen. Una manera fácil de ahorrarnos estos cálculos es tomar la correspondiente ecuación de D.P. (6.16), y alterar el valor de ν de la manera que se expuso más arriba. De esta sencilla sustitución resulta:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(1 + \nu) [X_{1,1} + X_{2,2}] \quad (6.23)$$

Nuevamente cabe recordar que el que un campo de tensiones satisfaga la ecuación anterior no es condición suficiente para asegurar que el mismo sea la solución de nuestro problema. Apuntemos también que la ecuación anterior indica que para que la solución de tensión plana sea exacta es condición necesaria que:

$$X_{i,i} = \text{div } \mathbf{X} = 0$$

En efecto, el que la solución sea exacta requiere $(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ lineal en x_1, x_2 , y el miembro izquierdo de (6.23) se anulará en este caso, anulándose por tanto $\text{div } \mathbf{X}$. La condición no es suficiente, dado que lo que la misma implica a través de (6.23) es que $(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ sea una función armónica, circunstancia que abarca otras posibilidades a parte de la linealidad.

-Ecuaciones de Navier-

Combinando las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y comportamiento de manera análoga a como se hizo en el caso tridimensional, se llega a:

$$\left(\frac{2\lambda G}{\lambda + 2G} + G \right) u_{\beta,\beta\alpha} + G u_{\alpha,\beta\beta} + X_\alpha = 0 \quad (6.24)$$

6.4.- Función potencial de tensiones.

En general, es más sencillo realizar manipulaciones matemáticas sobre las magnitudes escalares que sobre las vectoriales, en particular si se requiere hacer cambios de sistemas de coordenadas, operación complicada con vectores y tensores. Por eso, cuando es posible, las ciencias físicas buscan apoyarse en la definición de campos escalares a partir de los que obtener mediante derivación las componentes de las magnitudes no escalares de interés. Los potenciales eléctrico y gravitatorio son dos ejemplos típicos. En ciertas ciencias físicas el potencial escalar tiene un significado obvio. Por ejemplo, en el caso de la conducción de calor, la temperatura es un potencial escalar en función del cual se obtiene el vector flujo de calor. Sin embargo, no es necesario que una función potencial tenga una interpretación física tan obvia. En la Teoría de la Elasticidad se emplean frecuentemente funciones potenciales sin

significado físico aparente. Algunos de estos potenciales fueron comentados brevemente en el epígrafe 5.1. Aquellos potenciales se clasifican como "potenciales de desplazamiento", porque se formulan originalmente con la intención de obtener el campo de desplazamientos. Análogamente, un "potencial de tensiones" es una función escalar que derivada adecuadamente produce las componentes del tensor de tensiones. En problemas planos (de T.P. o de D.P.) es posible plantear un potencial de tensiones particularmente conveniente, conocido como Función de Airy, que será el objeto de estudio fundamental de este epígrafe.

Elección de una forma adecuada.

A la hora de definir un potencial contamos con libertad para elegir entre una variedad de alternativas. Sólo existe una regla obvia que debe ser respetada en todo caso: si la magnitud a representar es un tensor, las operaciones que apliquemos al potencial (que serán fundamentalmente derivaciones), deben definir precisamente un tensor. Además, sus componentes deben cumplir las características requeridas (simetría...). Por ejemplo es apropiado intentar obtener un campo vectorial mediante derivadas primeras de un potencial, o un campo tensorial mediante derivadas segundas, ya que, *si nos limitamos a coordenadas cartesianas*, las derivadas segundas de un campo escalar producen las componentes de un tensor. Como ejemplo, puede comprobarse que las componentes de tensión obtenidas a partir de un potencial ψ mediante $\sigma_{11}=\psi_{,22}$; $\sigma_{22}=\psi_{,11}$; $\sigma_{12}=-\psi_{,12}$; cumplen en efecto con las relaciones de transformación (1.19) que definen un tensor (procedimiento sugerido: calcule la expresión de la derivada en ejes girados $\psi_{,2'2'}$ en función de las derivadas en ejes sin girar $\psi_{,11}$; $\psi_{,22}$; $\psi_{,12}$, y compruebe que coincide con la expresión de $\sigma_{1'1'}$ obtenida bajo la hipótesis de que σ_{ij} se transforma como un tensor; realice análoga comprobación para la pareja $\psi_{,11}$ y σ_{22} , y para la $-\psi_{,12}$ y σ_{12}). Apréciase que el potencial de tensiones que definiremos a continuación se ajusta precisamente al patrón anterior.

Función de Airy.

Nos proponemos expresar las componentes de tensión del problema elástico bidimensional mediante derivadas de una función potencial ϕ . Vamos a limitarnos de momento al caso en que las fuerzas de volumen sean nulas, $X_i=0$. Si derivamos las ecuaciones de equilibrio en el dominio, (6.21) o (6.12), respecto de x_1 y x_2 respectivamente, tenemos:

$$\begin{aligned}\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} &= 0 \rightarrow \partial / \partial x_1 \rightarrow -\sigma_{12,12} = \sigma_{11,11} \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} &= 0 \rightarrow \partial / \partial x_2 \rightarrow -\sigma_{21,12} = \sigma_{22,22}\end{aligned}$$

Por tanto las tres cantidades $-\sigma_{12,12}$; $\sigma_{11,11}$; y $\sigma_{22,22}$; deben ser iguales. Elegimos igualarlas a la derivada cuarta $\phi_{,1122}$ de la función potencial:

$$-\sigma_{12,12} = \sigma_{11,11} = \sigma_{22,22} = \phi_{,1122}$$

Debemos asegurar que se satisfaga la condición anterior (elegida por nosotros mismos en cuanto a ϕ), y las ecuaciones de equilibrio. Por simple inspección encontramos que ambas se satisfacen si hacemos:

$$\sigma_{11} = \phi_{,22} ; \sigma_{22} = \phi_{,11} ; \sigma_{12} = -\phi_{,12} \quad (6.25)$$

Cualquier función ϕ que utilicemos conducirá, mediante (6.25) a un campo de tensiones que cumple las ecuaciones de equilibrio interno. Pero esto no asegura que exista un campo de desplazamientos físicamente aceptable asociado a tal campo de tensiones. Para asegurarlo debe satisfacerse además la ecuación de integrabilidad. Vamos a usar su expresión en función de las tensiones (la ecuación de Michell y Beltrami), que en los casos $X_i=0$ que analizamos adopta la misma forma tanto en T.P. como en D.P:

$$\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \sigma_{\alpha\alpha,\beta\beta} = 0$$

Expresando las tensiones en función de las derivadas del potencial mediante (6.25), tenemos que $\sigma_{11} + \sigma_{22} = \phi_{,22} + \phi_{,11} = \nabla^2\phi$. La ecuación de integrabilidad se reduce pues a la siguiente, que expresa la "condición de biarmonicidad" para ϕ :

$$\nabla^2(\nabla^2\phi) = \nabla^4\phi = \phi_{,1111} + 2\phi_{,1122} + \phi_{,2222} = 0 \quad (6.26)$$

Por lo tanto, un campo de tensiones obtenido mediante (6.25) utilizando una función ϕ biarmónica, cumplirá las ecuaciones de equilibrio en el dominio y la de integrabilidad. Sólo quedan por satisfacer las condiciones de contorno de nuestro problema para que ϕ represente la solución del mismo. Así pues, el problema elástico plano se resuelve si encontramos la función ϕ biarmónica adecuada a las condiciones de contorno. El potencial que hemos descrito fue introducido por G. B. Airy en 1862, y se conoce como función de Airy. El lector no debe desanimarse por no ser capaz de *adivinar* qué función de Airy resuelve cada problema dado. De hecho, la mayoría de las soluciones han sido obtenidas por un procedimiento de tipo inverso: tomando una función biarmónica, obteniendo su campo de tensiones asociado, y observando a posteriori si el mismo corresponde a las condiciones de contorno de algún problema de interés. No obstante, cuando la benevolencia del problema, o nuestra experiencia previa, nos sugiere de qué tipo será la solución de ϕ (un polinomio de cierto grado en x_1, x_2 , una función que dependa sólo de la distancia al origen, ...), es posible intentar un procedimiento directo: partiendo de una función de ese tipo que contenga constantes indeterminadas, se intenta ajustar las constantes para que se satisfagan las condiciones de contorno y la de biarmonicidad. Es evidente que solo será posible ajustar las constantes si la función que hemos elegido es lo bastante general.

Finalmente, haremos notar que la forma (6.25) de plantear un potencial de tensiones no es la más obvia. En un primer intento, parecería más natural probar con $\sigma_{11} = \psi_{,11}$; $\sigma_{22} = \psi_{,22}$; $\sigma_{12} = \psi_{,12}$; Es fácil comprobar que la elección anterior restringida a funciones ψ biarmónicas satisface la ecuación de integrabilidad, pero no las de equilibrio. Para satisfacer las ecuaciones de equilibrio debe restringirse más la elección de ψ (compruébese que debe ser $\nabla^2\psi = \text{cte}$). Lo anterior permite intuir que la propuesta de Airy será capaz de representar estados de tensión más generales que esta alternativa "más obvia", ya que permite elegir la función potencial con menos restricciones. Esta es la auténtica razón para preferir la función de Airy a otras alternativas. De hecho, mediante la función de Airy es teóricamente posible describir cualquier estado bidimensional de tensión. Aunque no lo probaremos explícitamente, el lector apreciará

la posibilidad de realizarlo cuando se estudien los enfoques de solución basados en series, en epígrafes posteriores.

Independencia de las tensiones respecto del material.

Las ecuaciones (6.25) y (6.26), que relacionan la función de Airy con las tensiones y delimitan las posibilidades de elección de la misma, no contienen ninguna referencia explícita a las constantes elásticas del material. No obstante, algunos problemas requerirán que la función de Airy contenga esas constantes, mientras que otros problemas no lo requerirán. Planteamos esta cuestión por el motivo siguiente: si podemos dar solución a un problema mediante una función de Airy en la que no aparezcan las constantes elásticas, la distribución de tensiones no dependerá de las mismas, y será por tanto la misma para cualquier material, y tanto para el caso de T.P. como para el de D.P. Es por tanto interesante dilucidar las circunstancias en que las tensiones de un problema plano son independientes del material.

Cuando *todas las condiciones de contorno* del problema están dadas en tensiones, el problema matemático que se plantea es encontrar una función ϕ biarmónica cuyas derivadas tomen ciertos valores prefijados en el contorno. El problema matemático anterior no involucra de ninguna manera a las constantes elásticas. Por tanto, el campo de tensiones es independiente del material en los problemas en que todas las condiciones de contorno están dadas en tensiones.

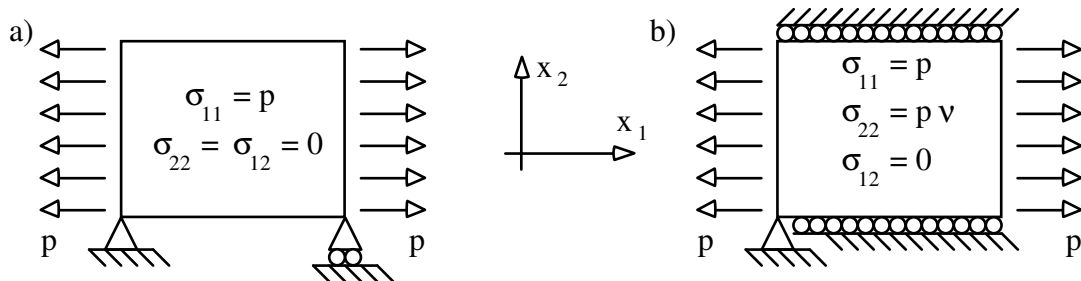


Figura 6.12.- a) Caso de independencia del campo de tensiones respecto de las ctes. elásticas y/o tipo de estado plano (T.P. o D.P.). b) Ejemplo de dependencia (T.P.).

Por el contrario, en los problemas en que existan restricciones superabundantes al desplazamiento (más de las necesarias para evitar movimientos de sólido rígido), el proceso matemático de solución requerirá involucrar a los desplazamientos para poder imponer sus valores prescritos. El manejar tensiones y desplazamientos implica el acoplamiento de ambas magnitudes a través de la ley de comportamiento, por lo que las constantes elásticas del material influirán en la solución de tensiones. La primera de las figuras 6.12 muestra un ejemplo sencillo en el que la solución de tensiones no depende del material. En este caso no aparecerán las constantes elásticas en la función de Airy (que en efecto es $\phi = p \cdot x_2^2 / 2$). El ejemplo de la segunda figura 6.12 es también de sencilla resolución sin acudir a funciones potenciales, y en él se observa que la solución de tensiones depende del material, y tiene distinta forma para T.P. y D.P., como corresponde a la superabundancia de condiciones de contorno en desplazamiento. Claramente, la función de Airy dependerá en este ejemplo de las constantes elásticas

(para T.P. es $\phi = p \cdot x_2^2/2 - v p x_1^2/2$). Adicionalmente debe entenderse que las constantes elásticas influyen *en todo caso* en el campo de desplazamientos, lo hagan o no en el de tensiones.

El que las tensiones sean independientes del material en ciertas configuraciones, abre la posibilidad de utilizar modelos de laboratorio en elasticidad. Por ejemplo es posible utilizar cualquier material de nuestra conveniencia (siempre que se comporte linealmente) para realizar un pequeño modelo a escala de un gran pórtico metálico, y medir en el modelo la distribución de tensiones, bajo cargas proporcionales a las reales. La independencia de la solución respecto del tipo de material junto con la relación lineal entre cargas y desplazamientos permite conocer las tensiones en el pórtico real experimentando únicamente sobre el pequeño modelo. La técnica conocida como "fotoelasticidad" consiste en construir los modelos con un material particular (material fotoelástico), que produce una birrefringencia al paso de la luz proporcional a la diferencia de tensiones principales. El paso de luz polarizada a través del modelo cargado, y de un segundo polarizador llamado analizador, produce franjas de luz y de sombra de las que se obtiene información precisa acerca del campo de tensiones.

6.5.- Fuerzas de volumen que derivan de un potencial.

Cuando las fuerzas de volumen son tales que sus componentes X_i pueden obtenerse como las derivadas de un cierto potencial escalar V respecto de las coordenadas espaciales ($X_i = -V_{,i}$; $\mathbf{X} = -\text{grad } V$), entonces las ecuaciones (6.25) pueden generalizarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} X_1 &= -V_{,1}; X_2 = -V_{,2} \Rightarrow \\ \sigma_{11} &= \phi_{,22} + V; \sigma_{22} = \phi_{,11} + V; \sigma_{12} = -\phi_{,12} \end{aligned} \quad (6.27)$$

Notemos que las ecuaciones anteriores definen en efecto componentes que siguen la ley de transformación de los tensores: las componentes definidas en (6.25) lo hacían, y en (6.27) sólo hemos superpuesto una presión hidrostática de valor V (adición del valor V a la diagonal del tensor), que como sabemos es invariante frente a transformaciones de coordenadas. Por otra parte, es fácil mostrar que las ecuaciones de equilibrio se satisfacen:

$$\begin{aligned} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + X_1 &= 0 \quad \rightarrow \quad \phi_{,221} + V_{,1} - \phi_{,122} - V_{,1} \equiv 0 \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + X_2 &= 0 \quad \rightarrow \quad -\phi_{,211} + \phi_{,222} + V_{,2} - V_{,2} \equiv 0 \end{aligned}$$

Sabemos que en presencia de fuerzas de volumen la ecuación de Beltrami-Michell adopta formas ligeramente diferentes para T.P. y D.P., que respectivamente son:

$$\nabla^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(1+\nu) \text{div } \mathbf{X}; \quad \nabla^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(1-\nu)^{-1} \text{div } \mathbf{X}$$

Expresando las tensiones en función de ϕ mediante (6.27), tenemos respectivamente:

$$\begin{aligned} \text{T.P.:} \quad \nabla^2 (\nabla^2 \phi) &= -(1-\nu) \nabla^2 V & \text{D.P.:} \quad \nabla^2 (\nabla^2 \phi) &= -(1-2\nu)(1-\nu)^{-1} \nabla^2 V \end{aligned} \quad (6.28)$$

Por tanto, en problemas con fuerzas de volumen que derivan de un potencial, la función de Airy debe cumplir la ecuación anterior que corresponda (según sea T.P. o D.P), en lugar de la de biarmonicidad. Vemos que en un caso con fuerzas de volumen la solución de tensiones dependerá del material, en general. No obstante, si las fuerzas de volumen derivan de un potencial armónico (es decir, se cumple $\nabla^2 V=0$), entonces las dos ecuaciones anteriores revierten a la condición de biarmonicidad para ϕ ($\nabla^4 \phi=0$). En este caso, desaparece nuevamente cualquier referencia explícita a las constantes elásticas del material, y es de aplicación lo dicho en el apartado anterior a cerca de la independencia de la distribución de tensiones respecto de las constantes elásticas.

Una ecuación diferencial en derivadas parciales como (6.28), que es no homogénea (el miembro derecho es una función conocida no nula de las coordenadas espaciales), puede resolverse de la misma manera que una ecuación diferencial no homogénea ordinaria: encontrando una solución particular y superponiéndole la solución general de la ecuación homogénea correspondiente. Como solución particular podemos tomar *cualquier* función ϕ que satisfaga la ecuación, no siendo necesario que contenga constantes indeterminadas. La "generalidad" de la solución general proviene de las constantes indeterminadas de la solución homogénea. Con frecuencia es muy útil pensar en el sentido físico del proceso anterior: la solución puede obtenerse como superposición de dos estados elásticos, uno correspondiente a un problema particular cuyas condiciones de contorno podemos elegir libremente con tal que actúen las fuerzas de volumen establecidas (ya que su función ϕ correspondiente debe satisfacer (6.28)), más un cierto estado con fuerzas de volumen nulas (ya que su función ϕ debe satisfacer la condición $\nabla^4 \phi=0$) elegido convenientemente. Los pasos de resolución según este procedimiento son pues:

- a) Encontrar la solución de un problema cualquiera que tenga las mismas fuerzas de volumen X_i , pero condiciones de contorno más sencillas. Por ejemplo, para analizar rigurosamente una viga con una sustentación dada y sometida a la acción de la gravedad, podemos utilizar como solución particular la de la viga totalmente apoyada sobre un suelo rígido sin fricción (esta solución es muy sencilla de obtener, ya que su estado de tensión resulta unidireccional).
- b) Superponer la solución correspondiente a una función ϕ biarmónica que sea *lo bastante general*. No es necesario asegurar que sea la solución absolutamente general de $\nabla^4 \phi=0$ (lo que supondría una extraordinaria complicación). Solo se requiere que sea lo bastante general como para que sea posible elegir sus constantes indeterminadas de acuerdo con el criterio del punto siguiente.
- c) Elegir las constantes indeterminadas de manera que la superposición reproduzca las condiciones de contorno dadas en el problema.

El enfoque anterior no es el único posible para la encontrar una solución de (6.28). Por ejemplo, si sospechamos que la solución de ϕ podría ser de determinado tipo, digamos un polinomio de cierto orden, podemos probar una función lo bastante general de ese tipo despreocupándonos de (6.28), y después ajustar las constantes imponiendo las condiciones de contorno y (6.28), por el orden que deseemos. Apréciase que en todo caso, y tanto si existen fuerzas de volumen como si no, la mayor dificultad radica en acertar con una función ϕ que perteneciendo a la tipología adecuada (biarmónica o bien que satisfaga (6.28)), sea lo bastante general para representar ciertas condiciones de

contorno (las originales del problema o unas complementarias, en caso de que empleemos superposición).

Seguidamente presentaremos algunos casos particulares frecuentes de fuerzas de volumen que derivan de potencial. Antes de ello merece la pena anunciar que la mayoría de los componentes mecánicos en ingeniería están sujetos a cargas de contorno mucho más intensas que las de volumen, por lo que estas últimas suelen poder despreciarse. Esto es menos cierto en las aplicaciones de ingeniería civil, en las que el peso de la construcción supera frecuentemente a las cargas aplicadas. No obstante, en el caso de vigas suele ser posible sustituir su peso propio por cargas de contorno, con excelente aproximación. En el caso de los pilares, el peso propio suele ser despreciable frente a las cargas de servicio. En otras aplicaciones de ingeniería civil, como elementos de contención, es preferible el tratamiento riguroso del peso propio como fuerza de volumen. En ingeniería de máquinas pueden darse aceleraciones importantes en los componentes, produciendo efectos de inercia que normalmente deben ser tratados con rigor como fuerzas de volumen. Es típicamente el caso de elementos extensos que rotan a gran velocidad. Si hablamos sólo de problemas abordables mediante un enfoque estático (al menos en cada instante), la necesidad de tratamiento riguroso de las fuerzas de volumen en ingeniería se limita prácticamente a los casos enumerados en este párrafo.

Peso propio.

Si se trata en efecto de un problema bidimensional, las fuerzas de gravedad deben estar contenidas en el plano 1-2. Si la densidad del sólido es constante, la fuerza por unidad de volumen será constante, de valor ρg , siendo g la aceleración de la gravedad y ρ la densidad. Según la orientación de los ejes respecto de la gravedad, la fuerza de volumen anterior tendrá componentes cartesianas X_1^* , X_2^* , de valor constante. Las fuerzas de volumen constantes derivan del potencial V que se indica a continuación, por lo que el campo de tensiones adopta, según (6.27), la forma que también se indica:

$$V = -X_1^* x_1 - X_2^* x_2$$

$$\sigma_{11} = \phi_{,22} - X_1^* x_1 - X_2^* x_2; \quad \sigma_{22} = \phi_{,11} - X_1^* x_1 - X_2^* x_2; \quad \sigma_{12} = -\phi_{,12} \quad (6.29)$$

Además, V es en este caso armónico, por lo que la función ϕ debe ser biarmónica, como en el caso de fuerzas de volumen nulas (pudiéndose dar la independencia de las tensiones respecto del material en las condiciones que se expusieron). Un problema se reduce a encontrar la función ϕ biarmónica que satisfaga, a través (6.29), las condiciones de contorno. Para fijar ideas: si la gravedad tiene el sentido negativo del eje x_2 , será $X_1^*=0$, $X_2^*=-\rho g$, $V = \rho g x_2$, $\sigma_{11} = \phi_{,22} + \rho g x_2$, $\sigma_{22} = \phi_{,11} + \rho g x_2$, $\sigma_{12} = -\phi_{,12}$.

Efectos de inercia sin aceleración angular.

Como es sabido, las aceleraciones de los puntos de un cuerpo rígido en un instante, pueden describirse en base a movimientos diferenciales (de traslación y de rotación) del sólido en su conjunto. En un cuerpo deformable, las distancias entre partículas pueden variar con el tiempo, dando lugar a términos adicionales de aceleración que dependen del campo de deformaciones (ya que su presencia conlleva que las distancias relativas no se mantengan). Los dos efectos anteriores requieren tratamientos muy diferentes. En el primer caso, la cinemática del sistema o mecanismo al que pertenezca nuestro sólido

permite conocer las aceleraciones a priori. En el segundo caso, las aceleraciones están asociadas a la deformación del sólido, y por tanto no se conocen a priori, sino que deben ser encontradas como parte de la solución. Este tipo de problema en que las aceleraciones y las deformaciones están matemáticamente acopladas es el objeto de estudio de la *Elastodinámica*. En las ecuaciones de campo de esta disciplina interviene inevitablemente el tiempo como variable. Los problemas más emblemáticos que estudia son aquellos en que se debe analizar la propagación de ondas elásticas, ya sean transitorias (como en los problemas elastodinámicos de impacto), o en régimen estacionario (como en los problemas más frecuentes de vibraciones mecánicas). Vamos a restringir aquí nuestra atención al caso en que las aceleraciones asociadas a la deformación sean despreciables frente a las debidas al movimiento del conjunto del sólido. Veremos que en estos casos es posible un enfoque estático del problema referido a un instante dado.

Conocidas la velocidad angular Ω y la aceleración angular $\dot{\Omega}$ (supuestas ambas en el sentido de x_3), así como la aceleración a^o de un punto O de un sólido (el cual haremos coincidir en el instante considerado con el origen del sistema cartesiano x_1, x_2), la aceleración a de otro punto P del sólido, que en ese instante ocupa las coordenadas x_1, x_2 , se expresa en componentes como:

$$a_1 = a^o_1 - \dot{\Omega} x_2 - \Omega^2 x_1 ; \quad a_2 = a^o_2 + \dot{\Omega} x_1 - \Omega^2 x_2$$

Utilizaremos el principio de D'Alembert para poder contemplar este problema dinámico bajo el enfoque de equilibrio estático en que hemos desarrollado la teoría de la Elasticidad. Las componentes de la fuerza de volumen serán las aceleraciones anteriores cambiadas de signo, y multiplicadas por la densidad, que supondremos constante:

$$X_1 = -\rho (a^o_1 - \dot{\Omega} x_2 - \Omega^2 x_1) ; \quad X_2 = -\rho (a^o_2 + \dot{\Omega} x_1 - \Omega^2 x_2)$$

Nuestra primera pregunta es si existe un potencial del que deriven las componentes anteriores. De las primeras condiciones expresadas en (6.26) se deduce inmediatamente que para que dicho potencial exista debe ser $X_{1,2} = X_{2,1}$ (véase: $X_{1,2} = -V_{,12} = -V_{,21} = X_{2,1}$), lo que solamente se cumple si la aceleración angular es nula. Bajo esta condición encontramos el potencial V por simple inspección:

$$\dot{\Omega} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} X_1 &= -\rho (a^o_1 - \Omega^2 x_1) \\ X_2 &= -\rho (a^o_2 - \Omega^2 x_2) \end{aligned} \Rightarrow$$

$$V = \rho (a^o_1 x_1 + a^o_2 x_2 - \Omega^2 (x_1^2 + x_2^2)/2) \quad (6.30)$$

Hay que notar que la expresión de V anterior no es armónica: $\nabla^2 V = 2\rho\Omega^2$ (que es una constante distinta de cero) por lo que las ecuaciones (6.28) suponen condiciones distintas para ϕ según se trate de T.P. o D.P. Por tanto, para este tipo de cargas tenemos $\nabla^4 \phi = M$, siendo M una constante que depende, entre otras cosas, de si se trata de T.P. o de D.P.

Como ejercicio, vamos a buscar explícitamente una solución particular para las cargas de volumen debidas a la rotación uniforme de un sólido entorno a un punto (el origen, que tendrá por tanto $a^o_1 = a^o_2 = 0$). Tal solución particular podrá ser usada en el futuro para resolver mediante superposición problemas con este tipo de carga de dominio (ver

epígrafe 6.6 para más detalles acerca de este procedimiento). El potencial de las fuerzas de volumen es en este caso $V = -\rho\Omega^2(x_1^2 + x_2^2)/2$. Para encontrar una solución *particular* de tensiones solo debemos sustituir en (6.27) el valor de V anterior y cualquier función ϕ que satisfaga $\nabla^4\phi = M$, que es la forma de (6.28) para nuestro caso. Dependiendo de la elección de ϕ obtendremos distintas soluciones particulares. Para empezar, es natural pensar en términos de cuarto grado para ϕ , ya que sus derivadas cuartas serán constantes. Existe alguna ventaja en elegir ϕ de forma que dependa solo de la distancia al origen, porque ello corresponde al caso más frecuente en que el sólido en rotación tiene geometría circular (esto se comprenderá mejor al realizar el estudio en coordenadas polares en un epígrafe posterior). Adoptaremos por tanto una función de la forma

$$\phi = A(x_1^2 + x_2^2)^2 = A(x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2)$$

Para que se cumpla $\nabla^4\phi = M$ debe ser $A = M/56$. En general, podríamos añadir a esa función cualquier función biarmónica con parámetros indeterminados. No lo hacemos porque no pretendemos ajustar finalmente las tensiones a las de una configuración propuesta, sino simplemente encontrar una solución de tensiones, sea cual fuere. Por supuesto, esta solución corresponderá a algún problema, que podremos identificar a posteriori. La solución particular adoptada para ϕ produce, a través de (6.27) el campo de tensiones siguiente:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \phi_{,22} + V = 12Ax_2^2 + 4Ax_1^2 - \rho\Omega^2(x_1^2 + x_2^2)/2 \\ \sigma_{22} &= \phi_{,11} + V = 12Ax_1^2 + 4Ax_2^2 - \rho\Omega^2(x_1^2 + x_2^2)/2 \\ \sigma_{12} &= -\phi_{,12} = -8Ax_1x_2\end{aligned}$$

No olvidemos que la anterior es una solución particular de entre las muchas existentes. Puede comprobarse que para cualquier punto $P(x_1^P, x_2^P)$, el vector tensión asociado a la dirección OP (cuyo vector unitario llamaremos $\mathbf{n}$) es:

$$\sigma_i^n = (4A(OP)^2 + V) n_i$$

Es decir, σ^n es colineal con la dirección $\mathbf{n}$. Por tanto, en cualquier punto, las direcciones principales son la radial y la perpendicular a ella. Además, como V es también proporcional a OP^2 , la tensión normal en todos los puntos del contorno de un círculo cualquiera centrado en el origen es la misma, y depende del radio al cuadrado del círculo. La tensión tangencial es evidentemente nula, y puede comprobarse que la tensión circunferencial (tensión normal según la dirección perpendicular a $\mathbf{n}$) depende también del radio al cuadrado. A la vista de las simetrías implicadas en las consideraciones anteriores, estamos en disposición de identificar que la solución particular que hemos encontrado podría corresponder al problema físico de un disco macizo girando en torno a su centro, y que además estuviese sometido a una cierta tensión normal en su contorno.

6.6.- Fuerzas de volumen que no derivan de potencial.

Acabamos de encontrar un caso de interés, cual es el de aceleraciones angulares no despreciables, en el que las fuerzas de volumen no derivan de un potencial. Este tipo de problemas no admite un tratamiento sencillo en el contexto de la función de Airy. No obstante, si somos capaces de encontrar (por procedimientos ajenos a la función de Airy) una solución particular para las cargas de volumen dadas, es posible plantear la resolución mediante superposición de esa solución particular y la solución de un cierto problema sin fuerzas de volumen, con las condiciones de contorno adecuadas. La justificación de que tal planteamiento es correcto se encuentra en las mismas ecuaciones de Navier (reproducimos las del caso tridimensional por generalidad; el razonamiento es análogo para las correspondientes ecuaciones en T.P., y en D.P):

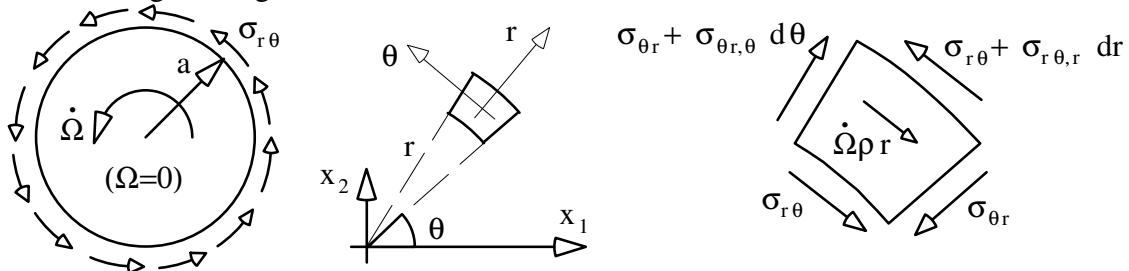
$$(\lambda + G)u_{j,ji} + Gu_{i,jj} = -X_i$$

Se trata de ecuaciones no homogéneas en derivadas parciales, cuya solución general puede obtenerse mediante superposición de una solución particular más una solución general de las ecuaciones homogéneas. Ello significa que para resolver un problema dado hemos de superponer la solución de cualquier problema que tenga las mismas fuerzas de volumen, más la solución de cierto problema sin fuerzas de volumen cuyas condiciones de contorno sean las complementarias del primero, de modo que la superposición reproduzca las del problema original. Con esta idea, y supuesto que seamos capaces de encontrar una solución particular, la complicación revierte a la de un problema matemático sin fuerzas de volumen.

Efecto de inercia debido a la aceleración angular.

Vamos a obtener seguidamente una solución particular que involucra a la aceleración angular. La solución particular que obtendremos podrá utilizarse para tratar el término de fuerza de volumen debido a la aceleración angular en cualquier problema futuro, mediante el enfoque de superposición que hemos apuntado.

El problema particular que planteamos se muestra en la primera figura 6.13, y consiste en un disco giratorio de radio "a" con velocidad angular nula, pero aceleración angular distinta de cero causada por tensiones tangenciales uniformemente distribuidas en el contorno $r=a$. Lo anterior correspondería al instante en que el disco empieza a moverse desde un estado de reposo. Tomamos coordenadas polares r, θ , y definimos unos ejes polares (cuya orientación depende del punto considerado), a los que también notamos como r, θ . Consideramos un elemento diferencial limitado por líneas $r=cte$, $\theta=cte$, como indica la segunda figura 6.13.



Figuras 6.13.- Disco giratorio con tensiones tangenciales en su contorno.

Si cambiásemos el sentido de las tensiones en el contorno, las fuerzas de volumen, así como todas las variables elásticas en general, serían las mismas pero cambiadas de signo. Por otra parte, ese problema sería "una imagen en el espejo" del problema original. La combinación de ambas consideraciones conduce a que el desplazamiento radial u_r de cualquier punto será nulo en ambos problemas, ya que es la única manera de que uno sea imagen especular de otro y a la vez u_r tenga signo opuesto en cada punto homólogo. El mismo razonamiento conduce también a que deben ser $\sigma_{rr}=0$, $\sigma_{\theta\theta}=0$ en todos los puntos. De paso, notemos que pensando en un disco delgado, el mismo razonamiento conduce a que $\sigma_{zz}=0$. Por tanto se trata de uno de los casos excepcionales en que las hipótesis de tensión plana son exactas. La tercera figura 6.13b indica las componentes no nulas de tensión que actúan en las caras del elemento, así como la fuerza unitaria de volumen según el principio de D'Alembert. El equilibrio de fuerzas en la dirección θ se expresa como:

$$(\sigma_{r\theta} + \sigma_{r\theta,r} dr)(r+dr)d\theta - \sigma_{r\theta} r d\theta + \\ + \sigma_{\theta r} dr \sin(d\theta/2) + (\sigma_{\theta r} + \sigma_{\theta r,\theta} d\theta) dr \sin(d\theta/2) - \rho r \dot{\Omega} r d\theta dr = 0$$

La anulación de momentos respecto de un punto cualquiera requiere que $\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r}$, similarmente a lo que sucede en coordenadas cartesianas. Los diferenciales de primer orden se cancelan. Despreciando los de orden tres y superiores y dividiendo por $r d\theta dr$ se obtiene:

$$\frac{2}{r} \sigma_{r\theta} + \sigma_{r\theta,r} = \rho r \dot{\Omega}$$

Se trata de una ecuación diferencial lineal no homogénea de coeficientes no constantes. Construiremos la solución por superposición de una particular más una general de la homogénea. Como solución de la homogénea ensayamos $\sigma_{r\theta} = Cr^\alpha$, y encontramos por sustitución directa que debe ser $\alpha = -2$. Por tanto, la solución homogénea general es $\sigma_{r\theta} = C/r^2$, donde C es una constante arbitraria. Como solución particular ensayamos nuevamente una función de la forma $\sigma_{r\theta} = C'r^{\alpha'}$, encontrando en este caso que debe ser $\alpha' = +2$, $C' = \rho \dot{\Omega} / 4$, por lo que la solución particular es $\sigma_{r\theta} = r^2 \rho \dot{\Omega} / 4$. La solución de nuestra ecuación diferencial es la superposición:

$$\sigma_{r\theta} = \frac{\rho \dot{\Omega}}{4} r^2 + \frac{C}{r^2} ; \quad \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} \equiv 0 \quad (6.31)$$

La constante C debe ser nula en este caso para mantener la continuidad en el origen (podría no serlo para un disco con agujero interior). Con esto, tenemos la solución particular de tensiones debidas a aceleración angular que necesitábamos para el tratamiento de los efectos de inercia realizado en el apartado anterior. Por supuesto, las componentes de tensión en un sistema de coordenadas cartesianas se obtienen mediante las ecuaciones de transformación (1.20) habituales, o equivalentemente utilizando el diagrama bidimensional de Mohr.

Lo cierto es que todavía no hemos abordado formalmente el tratamiento del problema elástico plano en coordenadas polares (se abordará más tarde en este mismo capítulo).

Por ello, y aunque en esencia se trata sólo de un problema matemático de cambio de variables, el desarrollo anterior puede plantear algunas dudas al lector. En particular, hemos obtenido la solución de tensiones en base al equilibrio del elemento, sin asegurar la existencia de un campo de desplazamientos asociado a esas tensiones. Esto hace que la solución de tensiones (6.31) sea simplemente una tentativa que requiere comprobación. Para no diferir dicha comprobación a un epígrafe posterior, apreciemos que el primer invariante (bidimensional) de tensión de nuestra tentativa (6.31), $\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{11} + \sigma_{22} = \dots$, es idénticamente nulo en todos los puntos del sólido, por lo que también lo será su laplaciano, $\nabla^2(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = 0$. Por otra parte se comprueba fácilmente que el campo de fuerzas de volumen del problema es adivergente, $\text{div}(\mathbf{X}) = 0$. La ecuación de Beltrami-Michell, $\nabla^2(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = \text{cte} \times \text{div}(\mathbf{X})$, resulta por tanto una identidad tanto para T.P. como para D.P. El que esta ecuación se satisface asegura la existencia de un campo de desplazamientos asociado a nuestra solución de tensiones, que por tanto es la correcta.

6.7.- Planteamiento en coordenadas cartesianas.

A continuación presentaremos algunos enfoques para la obtención de soluciones en ciertos tipos de problemas. El sistema cartesiano de coordenadas x_1, x_2 , es claramente idóneo para resolver problemas de sólidos rectangulares, cuyos contornos son de la forma $x_1 = \text{cte}$, $x_2 = \text{cte}$. Los sólidos tipo viga constituyen una categoría importante de problemas con esta geometría. Existen además otros tipos de problemas, que habitualmente tienen todos sus contornos rectos, cuya resolución es factible utilizando coordenadas cartesianas.

Funciones de Airy polinómicas.

Un polinomio en x_1, x_2 , de grado tres o menor siempre será una función biarmónica, que podremos utilizar como función de Airy. La función más general de este tipo es:

$$\phi = Ax^3_1 + Bx^2_1x_2 + Cx_1x^2_2 + Dx^3_2 + Ex^2_1 + Fx_1x_2 + Gx^2_2$$

Se han escrito los términos de tercer grado con coeficientes A, B, C, D, y los de segundo grado con coeficientes E, F, G. No se incluyen términos lineales ni constantes, que no aportarían nada al campo de tensiones (cualquier derivada segunda suya se anula). Las figuras 6.14 recopilan la forma de las tensiones en contornos $x_1 = \text{cte}$ y $x_2 = \text{cte}$ que corresponden a cada término del polinomio, según (6.25). Los valores concretos dependen de los de los coeficientes, y de la posición del origen de coordenadas. En particular, cualquier evolución lineal de tensiones de las mostradas, que se han dibujado de forma que se mantenga su signo en el rango de la figura, tendría un cambio de signo si el origen de coordenadas estuviese dentro del dominio rectangular.

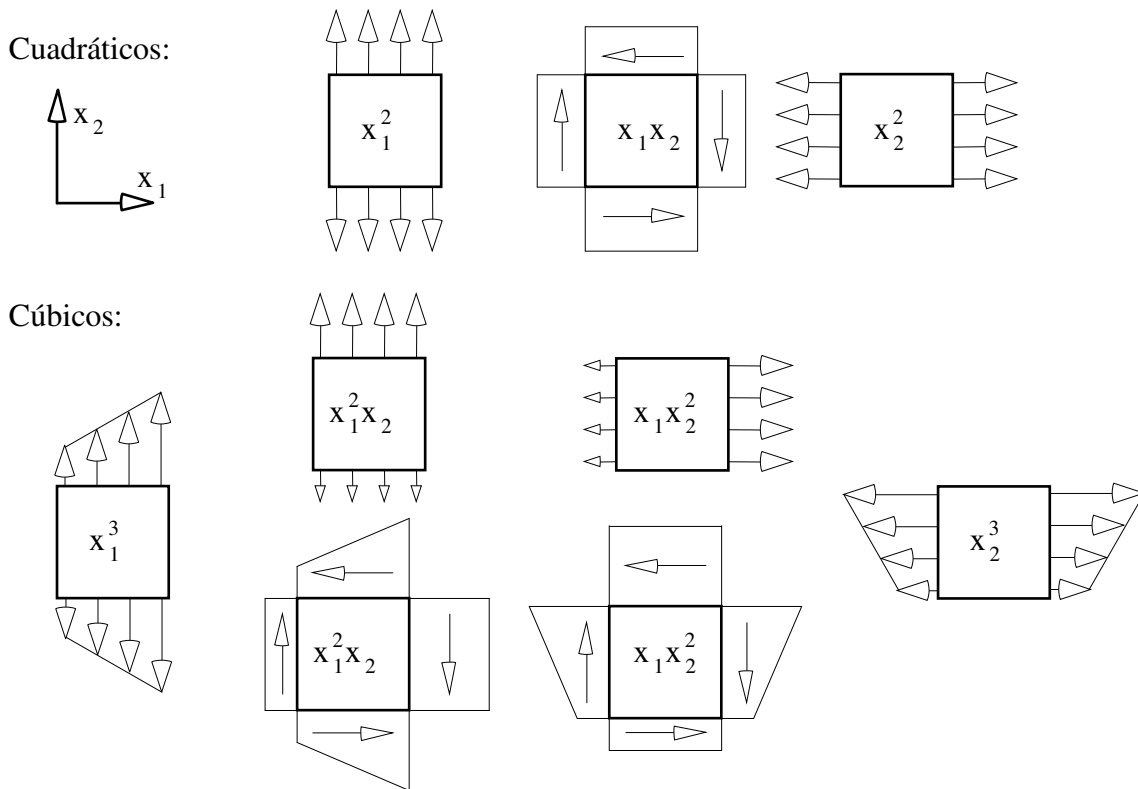


Figura 6.14.- Aportación de términos cuadráticos y cúbicos de ϕ a las tensiones.

La información anterior permite saber inmediatamente si será posible o no ajustar ciertas condiciones de contorno con un polinomio de tercer grado. Por ejemplo, no es posible ajustar con esa limitación las condiciones $\sigma_{22} = -p$ en $x_2 = +a$, $\sigma_{22} = 0$ en $x_2 = -a$, $\sigma_{12} = 0$ en $x_2 = \pm a$ (p , a , ctes), en todo un rango de valores de x_1 , ya que no hay forma de anular la tensión σ_{12} aportada por el término $x_1^2 x_2$ de ϕ , que sería necesario introducir. Por supuesto, no estamos limitados a términos polinómicos de orden dos y tres en la función de Airy. Simplemente ocurre que cualquiera de esos términos es biarmónico, y no requieren comprobación al respecto. Los términos de cuarto orden y superiores no son biarmónicos aisladamente, y es necesario imponer que lo sea el conjunto de ellos en el polinomio (los términos de cuarto orden $x_1^3 x_2$ y $x_1 x_2^3$ si que son biarmónicos excepcionalmente). Por ejemplo, si debemos incluir un término tipo x_1^4 , que no es biarmónico por sí mismo, debemos hacer en alguna forma combinada con la otra coordenada que sí lo sea, como $(x_1^4 - x_2^4)$, o $(x_1^4 - 6x_1^2 x_2^2)$.

En general utilizaremos un enfoque semi-inverso de resolución, consistente en observar atentamente las condiciones de contorno y las simetrías del problema para obtener indicios de qué tipo de términos polinómicos serán necesarios. Por ejemplo, si σ_{22} varía linealmente en x_1 , necesitaremos términos en ϕ que contengan x_1^3 . Basándonos en estos indicios propondremos una función ϕ . Conviene que nuestra propuesta sea lo más general posible dentro de lo razonable, porque rara vez resulta ser biarmónica una función que se limite a satisfacer los "indicios" aportados por las condiciones de contorno. Finalmente ajustamos los coeficientes del polinomio de modo que sea biarmónico y satisfaga las condiciones de contorno. Si ello no es posible, es que nuestra

función ϕ propuesta no es lo bastante general, o simplemente no es del tipo adecuado para el problema en cuestión.

Condiciones de contorno en forma débil.

Existen muchos problemas en los que una distribución complicada, o desconocida en detalle, de cargas actúa sobre una pequeña porción del contorno del sólido. En estas situaciones es posible invocar el principio de Saint Venant para obtener una solución útil desde el punto de vista práctico, ignorando la forma particular de la distribución de tensiones en la zona en cuestión, y aproximándola por otra forma que tenga la misma resultante y momento. Esta forma de imponer las condiciones de contorno se conoce como "forma débil". En general, cuando en lugar de imponer condiciones de contorno especificando el valor de la variable en cada punto ("forma fuerte"), se especifica el valor de alguna o algunas integrales suyas en cierto dominio, se dice que se trata de condiciones en forma débil.

Una forma débil es matemáticamente mucho menos exigente que una forma fuerte, por lo que es más probable que una determinada función ϕ que ensayemos resuelva un problema si aceptamos expresar en forma débil algunas de sus condiciones de contorno. Por tanto, desearemos utilizar formas débiles siempre que sea razonable. Como criterio general, debe entenderse que no tendría sentido expresar en forma débil una condición que afectase a una gran zona del contorno del sólido, ya que el principio de Saint Venant no sería de aplicación, y el error asociado a esa aproximación no quedaría confinado a un pequeño dominio.

Un ejemplo: Viga con carga uniforme.

Como ilustración de lo expuesto en los dos apartados anteriores, consideremos el problema de la figura 6.15, que representa una viga simplemente apoyada (así se denomina a la sustentación indicada), con carga uniformemente distribuida en su contorno superior, $x_2=b$. Si p es el valor de la carga por unidad de longitud, la reacción en cada apoyo será pa , como se indica. Para poder ser considerada como tal, el canto ($2b$) de una viga siempre será pequeño comparado con su longitud ($2a$), por lo que los contornos $x_1 = \pm a$ son pequeñas regiones del sólido, y en principio es de esperar poco error si sustituimos las cargas que actúen aquí por otras estáticamente equivalentes. Aplicando la idea anterior, sustituiremos las fuerzas puntuales pa , incómodas de manejar analíticamente, por distribuciones de tensiones tangenciales en los contornos $x_1 = \pm a$. La opción más sencilla sería una tensión tangencial constante.

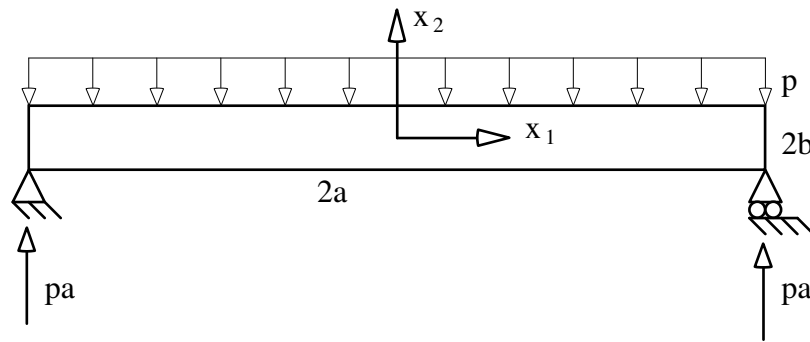


Figura 6.15.- Viga simplemente apoyada con carga uniforme.

Sin embargo, en un elemento diferencial situado en una esquina de la viga (puntos $x_1=\pm a$, $x_2=\pm b$), tendríamos un valor no nulo de tensión tangencial en la cara vertical y nulo en la horizontal (esto último según el enunciado, que no deseamos modificar en lo referente a los extensos contornos $x_2=\pm b$). Tal elemento no podría estar en equilibrio, ya que no se cumpliría la condición $\sigma_{12}=\sigma_{21}$, lo que no es coherente en nuestro contexto. Para que no se produzca esta incoherencia elegiremos una evolución de tensión tangencial que se anule en $x_2=\pm b$, como se indica en la figura 6.16.

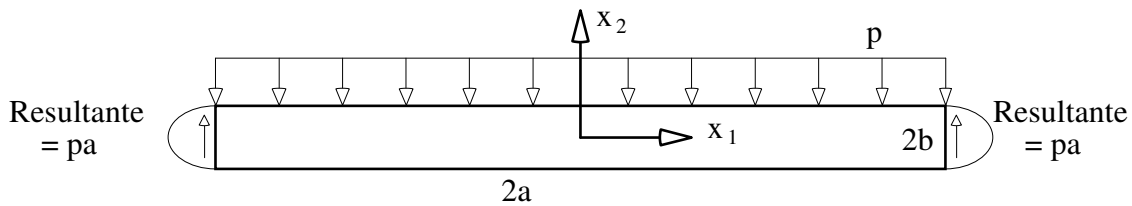


Figura 6.16.- Aproximación de las condiciones de contorno en los extremos.

Lo anterior constituye la aproximación de algunas de las condiciones de contorno en tensiones (las reacciones) por formas débiles en los extremos de la viga, lo que es una forma de decir que consideramos válida cualquier evolución de tensión tangencial en esos extremos, siempre que su resultante tenga el valor correcto, y en este caso que además se anule en las esquinas. Vamos a plantear una solución basada en funciones polinómicas. El polinomio más sencillo que puede adaptarse a los requisitos en $x_1=\pm a$ es de segundo grado en x_2 . Como $\sigma_{12}=-\phi_{,12}$, hemos de considerar una función de Airy al menos cúbica en x_2 y al menos lineal en x_1 . Por otra parte, las tensiones σ_{22} deben variar al menos linealmente con x_2 , para poder tomar el valor $-p$ en $x_2=b$, y cero en $x_2=-b$, y ser constantes al variar x_1 . Como $\sigma_{22}=\phi_{,11}$ tenemos que considerar una función de Airy al menos lineal en x_2 y cuadrática en x_1 .

Las observaciones anteriores nos ofrecen una orientación acerca del tipo de función ϕ que necesitamos, pero no debe esperarse que incluyendo solamente en ϕ los términos que reproducen las condiciones de contorno se obtenga la solución del problema: debemos plantear una ϕ lo bastante general como para que además podamos ajustar la condición de biarmonicidad. El como dotar a ϕ de generalidad suficiente pero sin llegar a complicar innecesariamente el problema no es una cuestión evidente. En general es preferible incluir términos innecesarios (y encontrar que su coeficiente es cero) a no

incluir términos que hubiesen sido necesarios (y tras un tedioso proceso no obtener más conclusión que la función propuesta no resuelve el problema). Teniendo en cuenta lo anterior, y puesto que los mayores órdenes necesarios son cuadrático en x_1 y cúbico en x_2 , podríamos considerar un polinomio completo de grado $3+2=5$. Un polinomio completo en x_1, x_2 , de grado 5 tiene, tras descartar los términos lineales y constante, 18 coeficientes que debemos ajustar. Podemos simplificar un poco la tarea haciendo intervenir la simetría en tensiones del problema respecto del plano $x_1=0$. En virtud de dicha simetría debe cumplirse:

$$\sigma_{11}(x_1, x_2) = \sigma_{11}(-x_1, x_2) ; \quad \sigma_{22}(x_1, x_2) = \sigma_{22}(-x_1, x_2) ; \quad \sigma_{12}(x_1, x_2) = -\sigma_{12}(-x_1, x_2)$$

A la vista de (6.25), las condiciones anteriores se satisfacen si la función ϕ es par en x_1 . Por tanto ϕ queda limitada a la forma:

$$\phi = f_1(x_2) + x_1^2 f_2(x_2) + x_1^4 f_3(x_2) + \dots$$

Donde $f_i(x_2)$ son polinomios en x_2 . Nuestra propuesta de función de Airy será pues un polinomio de grado 5 par en x_1 . Como las condiciones de contorno sugieren que será suficiente una variación cuadrática en x_1 , adoptaremos además esta limitación. En problemas que el lector aborde por sí mismo, esto último debe considerarse un riesgo innecesario, ya que no supondría gran complicación incluir los términos x_1^4 , $x_1^4 x_2$. Proponemos en definitiva el siguiente polinomio como función de Airy:

$$\phi = x_1^2 (C_1 x_2^3 + C_2 x_2^2 + C_3 x_2 + C_4) + C_5 x_2^5 + C_6 x_2^4 + C_7 x_2^3 + C_8 x_2^2$$

Intentaremos imponer a este polinomio la condición de biarmonicidad y las condiciones de contorno, vía (6.25). El conjunto de condiciones es:

$$\begin{array}{ll} \sigma_{12}=0 \text{ en } x_2=\pm b & \int_{-b}^b \sigma_{11} dx_2 = 0 \text{ en } x_1=\pm a \\ \sigma_{22}=0 \text{ en } x_2=-b & \int_{-b}^b \sigma_{11} x_2 dx_2 = 0 \text{ en } x_1=\pm a \\ \sigma_{22}=-p \text{ en } x_2=+b & \int_{-b}^b \sigma_{12} dx_2 = \pm pa \text{ en } x_1=\pm a \\ \nabla^4 \phi = 0 & \end{array}$$

Las condiciones dadas en forma integral corresponden a la expresión en forma débil de las condiciones de contorno en los extremos $x_1=\pm a$ de la barra. Las condiciones en forma fuerte (las que figuran a la izquierda) corresponden a los grandes contornos $x_2=\pm b$. La condición de biarmonicidad debe imponerse en todo el dominio. Podemos imponer las condiciones en el orden que deseemos, si bien suele resultar operativamente más cómodo comenzar por las condiciones dadas en forma fuerte, y de ellas por las homogéneas (valores dados iguales a cero). Operando así obtenemos:

$$\begin{array}{l} \sigma_{12}=0=\phi_{,12} \text{ en } x_2=\pm b, \Rightarrow 2x_1(3C_1 b^2 \pm 2C_2 b + C_3) = 0 \Rightarrow C_2=0 ; C_3=-3b^2 C_1 \\ \sigma_{22}=0=\phi_{,11} \text{ en } x_2=-b, \Rightarrow 2(-C_1 b^3 - C_3 b + C_4) = 0 \Rightarrow C_4=-2b^3 C_1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Biarmonicidad: } \phi_{,1111} + 2\phi_{,1122} + \phi_{,2222} &= 0 = \\ &= 4(6C_1x_2 + 2C_2) + 120C_5x_2 + 24C_6 \Rightarrow C_5 = -C_1/5; C_6 = 0 \end{aligned}$$

$$\sigma_{22} = \phi_{,11} = -p \text{ en } x_2 = +b \Rightarrow 2(C_1b^3 + C_3b + C_4) = -p \Rightarrow C_1 = p/(8b^3)$$

Calculado C_1 sabemos también C_3 , C_4 y C_5 . Resumamos lo obtenido hasta aquí:

$$C_1 = p/(8b^3); C_2 = 0; C_3 = -3p/(8b); C_4 = -p/4; C_5 = -p/(40b^3); C_6 = 0$$

Quedan por ajustar las constantes C_7 y C_8 . Pasemos a imponer las condiciones de contorno en forma débil, comenzando por las homogéneas:

$$\begin{aligned} \int_{-b}^b \sigma_{11} dx_2 &= 0 \text{ en } x_1 = \pm a \\ \Rightarrow \int_{-b}^b (x_1^2 6C_1x_2 + 20C_5x_2^3 + 6C_7x_2 + 2C_8) dx_2 &= \left[a^2 3C_1x_2^2 + 5C_5x_2^4 + 3C_7x_2^2 + 2C_8x_2 \right]_{-b}^b = \\ &= 4C_8b = 0 \Rightarrow C_8 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-b}^b \sigma_{11}x_2 dx_2 &= 0 \text{ en } x_1 = \pm a \\ \Rightarrow \int_{-b}^b (x_1^2 6C_1x_2 + 20C_5x_2^3 + 6C_7x_2 + 2C_8)x_2 dx_2 &= \left[a^2 2C_1x_2^3 + 4C_5x_2^5 + 2C_7x_2^3 \right]_{-b}^b = \\ &= a^2p/2 - b^2p/5 + 4b^3C_7 = 0 \Rightarrow C_7 = \left(\frac{1}{20b} - \frac{a^2}{8b^3} \right) p \end{aligned}$$

Con esto tenemos calculadas todas las constantes, pero aún nos queda alguna condición por imponer. Si la misma no se satisficiera para los valores de las C_i ya calculados, concluiríamos que la función ϕ propuesta no resuelve el problema, y pasaríamos a proponer otra más general. Comprobamos que, afortunadamente, sí se satisface:

$$\begin{aligned} \int_{-b}^b \sigma_{12} dx_2 &= \int_{-b}^b -2x_1(3C_1x_2^2 + C_3) dx_2 = -2x_1 \left[C_1x_2^3 + C_3x_2 \right]_{-b}^b = -2x_1(2C_1b^3 + 2C_3b) = \\ &= -2x_1(p/4 - 3p/4) = px_1 \end{aligned}$$

Que efectivamente vale $+pa$ en $x_1=a$, y $-pa$ en $x_1=-a$. La función propuesta satisface todos los requerimientos del problema, y por tanto proporciona la solución del mismo. Seguidamente se detallan las componentes de tensión que derivan de la ϕ calculada:

$$\begin{aligned} \phi &= x_1^2 \left[\frac{p}{8b^3} x_2^3 - \frac{3p}{8b} x_2 - \frac{p}{4} \right] - \frac{px_2^5}{40b^3} + p \left[\frac{1}{20b} - \frac{a^2}{8b^3} \right] x_2^3 \\ \sigma_{11} &= x_1^2 \frac{3px_2}{4b^3} - \frac{px_2^3}{2b^3} + 3p \left[\frac{1}{10b} - \frac{a^2}{4b^3} \right] x_2 \\ \sigma_{22} &= \frac{p}{4b^3} x_2^3 - \frac{3p}{4b} x_2 - \frac{p}{2} \quad \sigma_{12} = -px_1 \left[\frac{3x_2^2}{4b^3} - \frac{3}{4b} \right] \end{aligned}$$

Es interesante observar la evolución de las componentes de tensión anteriores, mostradas a escala en la figura 6.17 para el caso $a=10$, $b=1$, y carga p unidad. La esbeltez, dada por la relación longitud/canto, es pequeña en este caso (10:1), siendo usuales relaciones del orden de 25:1. Precisamente, los efectos que comentaremos ahora son aún más acusados para esbelteces mayores.

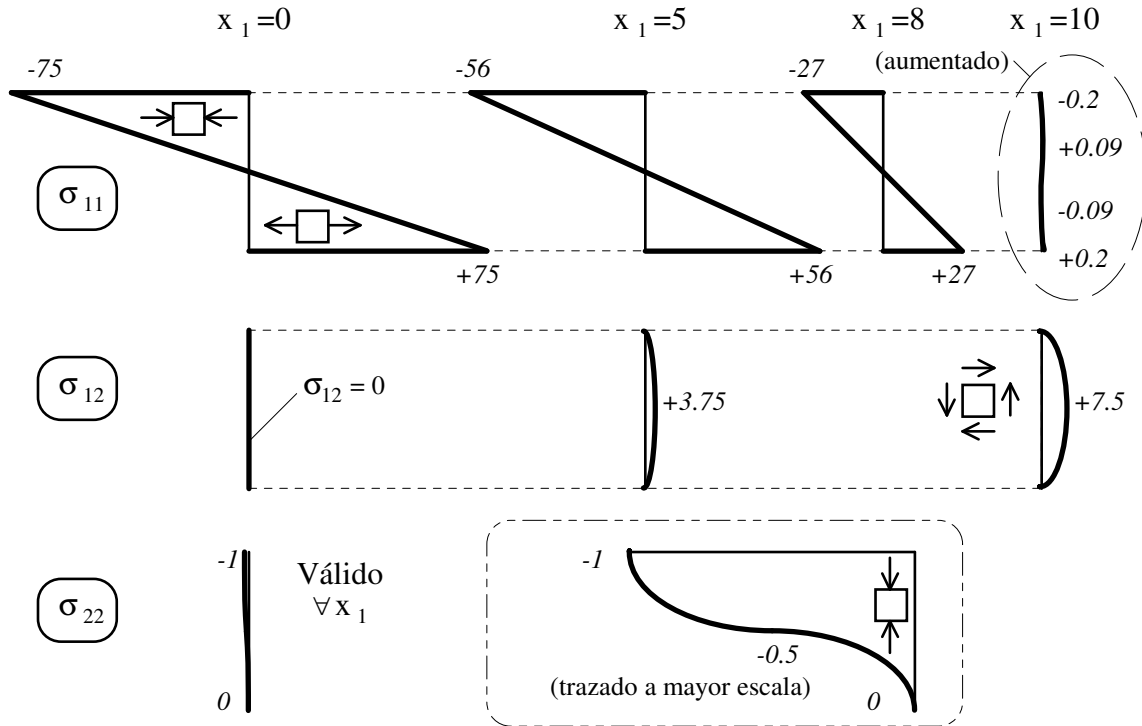


Figura 6.17.- Tensiones en la viga simplemente apoyada. $a=10$, $b=1$, $p=1$.

En las gráficas de tensiones normales σ_{11} , que se dibujan en las secciones $x_1=0$ (mitad de la viga), $x_1=5$, $x_1=8$, y $x_1=10$ (extremo de la viga), y de las demás componentes de tensión, llaman la atención los siguientes aspectos:

- En la inmensa mayoría del sólido, las tensiones σ_{11} son mucho mayores que la carga p aplicada, y que cualquier otra componente de tensión. Esto es una característica general del trabajo a flexión, que es la denominación que recibe la tipología resistente consistente en un elemento esbelto poco sustentado que soporta cargas transversales.
- En el extremo $x_1=10$ de la viga, la tensión σ_{11} obtenida es en cambio muy pequeña, como muestra la acotación de máximos y mínimos (se ha dibujado a escala aumentada para que no se aprecie como cero). Esto es satisfactorio, ya que en el problema original, figura 6.15, las tensiones normales son nulas en esas caras. Nótese que la distribución de σ_{11} es impar en x_2 .
- La evolución de tensiones normales es muy aproximadamente lineal en x_2 para todas las cotas x_1 dibujadas a excepción de la $x_1=10$, lo que evidencia que el término en x_2^3 es prácticamente despreciable salvo en zonas muy próximas a los extremos de la viga.

- Las tensiones tangenciales son pequeñas comparadas con las longitudinales, tienen evolución parabólica en x_2 , y crecen desde valor nulo en $x_1=0$ hasta valores máximos en los extremos de la viga.
- Las tensiones σ_{22} son comparativamente muy pequeñas en todo el sólido, evolucionando desde el valor prescrito no nulo ($p=1$) en $x_2=b$ hasta cero en $x_2=-b$. Es llamativo que se den las menores tensiones precisamente en la dirección en que actúan las cargas exteriores.

El lector tendrá oportunidad de identificar en las hipótesis habituales de Resistencia de Materiales (R.M.) las observaciones anteriores, al estudiar esa disciplina. Para dar noticia de la buena aproximación que se consigue bajo dichas hipótesis (que no entramos a detallar), incluso en una viga de moderada esbeltez como la que hemos analizado, se comentan a continuación los resultados dados por la R.M. para este problema:

$$\sigma_{11}^{RM} = \frac{3p}{4b^3} x_1^2 x_2 - \frac{3pa^2}{4b^3} x_2 \Rightarrow (\sigma_{11} - \sigma_{11}^{RM}) = -\frac{px_2^3}{2b^3} + \frac{3px_2}{10b}$$

El error anterior de la solución de R.M. es del orden de 0.5 en nuestro ejemplo, y resulta poco importante en la práctica, ya que afecta a tensiones σ_{11} de valor bastante superior a 20 en casi todo el sólido, como hemos visto. En cuanto a las tensiones tangenciales σ_{12} , las calculadas según la R.M. coinciden con las obtenidas aquí. Las tensiones σ_{22} son directamente obviadas (supuestas nulas) por la R.M.

Como argumento a favor del uso de formas débiles, puede comprobarse que si se sustituye alguna de las condiciones en forma débil que hemos empleado por su correspondiente forma fuerte, por ejemplo si se impone $\sigma_{11}=0$ en $x_1=\pm a$, en lugar de imponer la anulación de su integral, la búsqueda de una función de Airy satisfactoria se complica drásticamente (una solución del tipo de la que hemos encontrado no es capaz de satisfacer ese requerimiento). Si hubiésemos procedido así, habríamos descartado la solución presentada, que en realidad tiene excelente precisión desde el punto de vista de cualquier aplicación práctica.

Se ha mostrado que pueden obtenerse soluciones interesantes mediante funciones de Airy polinómicas. Sin embargo, el número de parámetros independientes entre sí disponibles para ajustar condiciones de contorno no crece tanto como puede parecer en un principio cuando aumentamos el grado del polinomio. En efecto, un polinomio en x_1, x_2 , tiene $n+1$ términos de grado n . Al imponer la condición de biarmonicidad al polinomio, dichos términos pasan a ser de grado $n-4$ (suponemos $n>4$). Nótese que no habrá más términos de grado $n-4$ que los que provengan de términos de grado n en el polinomio original, por lo que la condición de biarmonicidad debe satisfacerse para cada conjunto de términos de grado n independientemente. Aplicada la condición de biarmonicidad, $\nabla^4 \phi = 0$, aparecerán los $n-3$ términos posibles de grado $n-4$, todos los cuales deben anularse. Esto supone $n-3$ relaciones entre los $n+1$ términos de grado n del polinomio original. Por lo tanto, de los $n+1$ parámetros sólo son independientes $(n+1)-(n-3)=4$ parámetros. Es decir, que cuando decidimos aumentar en uno el grado del polinomio, sólo estamos introduciendo 4 parámetros útiles para ajustar condiciones de contorno, con independencia del grado del polinomio.

Funciones de Airy en forma de serie.

La utilidad del uso de polinomios como funciones de Airy está limitada por la complejidad algebraica que suponen para grados elevados. Esta limitación está agravada por el hecho de que al aumentar el grado del polinomio la complejidad algebraica crece mucho más aprisa que nuestras posibilidades de que el polinomio de solución a nuestro problema, por los motivos expuestos en el párrafo anterior. Además se da la circunstancia de que algunas formas de carga importantes no admiten ser representadas mediante una serie de potencias convergente (por ejemplo una carga concentrada, asociada matemáticamente a la función delta de Dirac). El uso de polinomios será claramente inadecuado en estos casos. A la vista de las limitaciones que se divisan en el uso de polinomios, desearíamos disponer de algún procedimiento que ofrezca mayores garantías de que nuestros esfuerzos serán fructíferos. Un enfoque de utilidad es plantear soluciones en forma de serie de Fourier. Para ilustrar este procedimiento en coordenadas cartesianas nos apoyaremos en el ejemplo de viga simplemente apoyada sometida a carga distribuida de forma arbitraria en su contorno superior, como muestra la figura 6.18. No se indican explícitamente cargas concentradas, aunque podría haberlas.

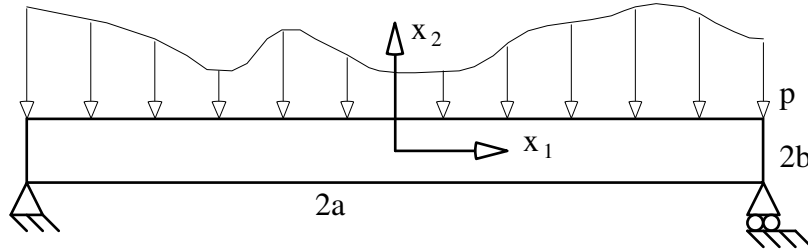


Figura 6.18.- Viga con carga distribuida de forma arbitraria.

La mayor dificultad del problema planteado es aproximar la función de carga $p(x_1)$ en el contorno superior. Consideremos una función de Airy de la forma:

$$\phi = f(x_2) \cos(\lambda x_1)$$

La idea subyacente es que las tensiones que derivan de esta función tendrán un factor tipo coseno (o seno), y superponiendo varias de estas funciones con distintos valores de λ podremos aproximar cualquier evolución de tensiones en x_1 . Impongamos que la función ϕ sea biarmónica:

$$\begin{aligned} \nabla^4 \phi &= \lambda^4 f(x_2) \cos(\lambda x_1) + f''''(x_2) \cos(\lambda x_1) - 2\lambda^2 f''(x_2) \cos(\lambda x_1) = 0 \\ \Rightarrow \lambda^4 f(x_2) + f''''(x_2) - 2\lambda^2 f''(x_2) &= 0 \end{aligned}$$

Las primas denotan el orden de derivación de f respecto de x_2 . El polinomio característico de esta ecuación diferencial ordinaria de coeficientes constantes es $\lambda^4 + s^4 - 2\lambda^2 s^2 = 0$, cuyas raíces son $s = +\lambda$ (doble), $s = -\lambda$ (doble), por lo que su solución es:

$$f(x_2) = (A + Bx_2)e^{\lambda x_2} + (C + Dx_2)e^{-\lambda x_2}$$

Por tanto, la función $f(x_2)$ contiene cuatro parámetros indeterminados (A,B,C,D). Construimos una función ϕ más general por superposición:

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_2) \cos(\lambda_n x_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(A_n + B_n x_2) e^{\lambda_n x_2} + (C_n + D_n x_2) e^{-\lambda_n x_2} \right] \cos(n\pi x_1 / a) \quad (6.32)$$

Hemos elegido $\lambda_n = n\pi/a$ para que ϕ tenga forma de desarrollo en serie de Fourier en $-a < x_1 < +a$. La función anterior es simétrica en x_1 puesto que sólo contiene términos en su coseno. El desarrollo general de una función tendrá también los correspondientes términos tipo seno (antisimétricos respecto de x_1), que reciben idéntico tratamiento, y que omitimos por brevedad. Las componentes de tensión que derivan de (6.32) tienen también forma de serie de Fourier, ya que para el armónico n de la serie tenemos:

$$\sigma_{11} = f_n''(x_2) \cos(\lambda_n x_1) ; \quad \sigma_{22} = -f_n(x_2) \lambda_n^2 \cos(\lambda_n x_1) ; \quad \sigma_{12} = -f_n'(x_2) \lambda_n \sin(\lambda_n x_1)$$

En cada armónico n tenemos cuatro coeficientes (y otros cuatro si hay términos en seno, para los que se aplican idénticas consideraciones), por lo que será posible ajustarlos para que se satisfagan las tres condiciones de contorno homogéneas en los grandes contornos $x_2 = \pm b$. Estas tres condiciones son:

$$\begin{aligned} \sigma_{22}(x_2 = -b) &= 0 \Rightarrow f_n(-b) = 0 \\ \sigma_{12}(x_2 = +b) &= 0 \Rightarrow f_n'(+b) = 0 \\ \sigma_{12}(x_2 = -b) &= 0 \Rightarrow f_n'(-b) = 0 \end{aligned}$$

Tras imponer las condiciones anteriores aún quedará disponible un parámetro (por ejemplo habremos expresado B_n , C_n , D_n , en función de A_n), que se ajustará para que $f_n(+b)$ tenga el mismo valor que el coeficiente correspondiente del desarrollo en serie de Fourier de la carga actuante el contorno superior. De esta manera podemos ajustar tantos términos como queramos del desarrollo en serie de Fourier de la carga dada, a la vez que se respetan las otras condiciones de contorno en $x_2 = \pm b$. Para realizar lo anterior debemos obviamente disponer del desarrollo en serie de Fourier de la carga, lo que se supone al alcance del lector. Por ejemplo, los coeficientes de una serie de Fourier truncada pueden evaluarse resolviendo el sistema de ecuaciones (ordinarias) resultante de imponer la igualdad entre la función original y la aproximación en serie, en los ceros del primer término descartado de la serie. El desarrollo en serie de Fourier de la carga aplicada ($\sigma_{22}(x_1)$ en $x_2 = b$) incluirá en general un término constante, además de los trigonométricos. Este término no aparece en la superposición de funciones que estamos empleando (nótese que para $n=0$ la ecuación (6.32) degeneraría a un polinomio de grado uno, que no tendría ningún efecto sobre las tensiones). Es por tanto necesario superponer a la función de Airy (6.32) un polinomio de segundo grado para que genere el término de tensión constante mencionado.

Realizado todo lo anterior, hemos de ajustar aún las condiciones de contorno en los contornos $x_1 = \pm a$, lo que haremos en forma débil mediante funciones de tipo polinómico, siguiendo el enfoque del apartado anterior. La solución de este tipo, a superponer a la solución en forma de serie, debe tener σ_{22} y σ_{12} nulas en $x_2 = \pm b$, mientras que σ_{11} y σ_{12}

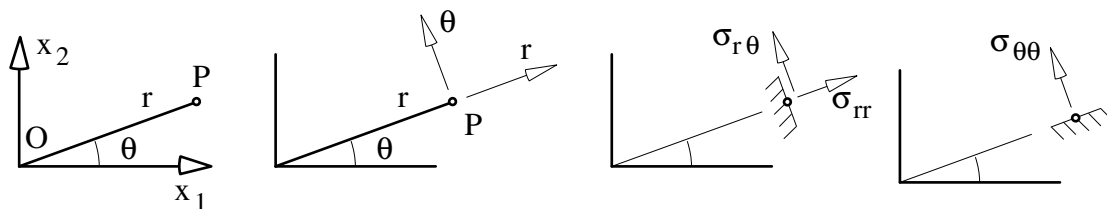
en $x_1 = \pm a$ deben complementar a la solución en serie para que la fuerza resultante y el momento tengan el valor correcto en esos extremos de la viga.

El procedimiento descrito en este apartado muestra un camino de resolución para cualquier problema tipo viga apoyada en sus extremos, si aceptamos imponer las condiciones de contorno en esos extremos en forma débil. Las cargas a lo largo de la viga pueden ser representadas con tanta exactitud como se desee, tomando más términos del desarrollo en serie.

Merece la pena realizar una reflexión final acerca de la aplicabilidad del procedimiento descrito a otros tipos de problemas físicos, con tal de que estén caracterizados por ecuaciones diferenciales lineales. Dicho procedimiento consiste en buscar una forma sencilla de solución que contenga un parámetro (frecuentemente es buena idea intentar una forma con variables separadas), y construir una solución más general superponiendo soluciones, con un valor distinto del parámetro y una constante multiplicativa cada una, disponible para ser ajustada a conveniencia. El procedimiento es también aplicable cuando el dominio es infinito o semi infinito, en cuyo caso, y supuesto que se empleen funciones armónicas en x_1 , aparecen las integrales asociadas a la transformación de Fourier en lugar de sumatorios de términos armónicos.

6.8.- Planteamiento en coordenadas polares.

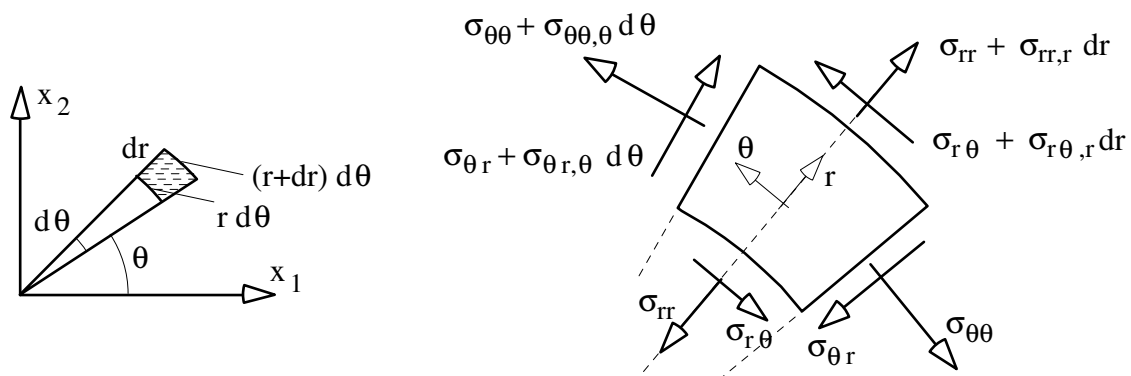
La posición de un punto P del plano puede expresarse mediante coordenadas cartesianas $x_1(P)$, $x_2(P)$, como hemos venido haciendo hasta ahora, pero en muchos problemas es más conveniente elegir otro tipo de coordenadas. En coordenadas polares, la posición de un punto del plano se expresa mediante su distancia a otro punto que llamaremos origen, y el ángulo que forma la recta que pasa por ambos puntos (el origen y el punto P en cuestión) con una dirección fija. Si hemos definido previamente un sistema de coordenadas cartesianas, y hacemos coincidir su origen de O con el origen de coordenadas polares, la posición de un punto P queda determinada por el ángulo θ y la distancia r indicadas en la primera figura 6.19.



Figuras 6.19.- Coordenadas polares y ejemplo de componentes positivas de tensión.

Adicionalmente, definimos dos direcciones asociadas al punto P , que abusando de la notación llamaremos dirección r y dirección θ , y que son respectivamente la dirección obtenida haciendo variar la coordenada r con $\theta = \text{cte}$, y la dirección tangente al círculo obtenido al variar θ con $r = \text{cte}$. Se define un sentido positivo en cada una de estas direcciones, que es el sentido creciente de la coordenada correspondiente, según indican

las flechas en la segunda figura 6.19. Es frecuente denominar a estas direcciones 'eje r ' y 'eje θ ', lo que se hará en lo sucesivo en este texto, aunque estos 'ejes' no se utilicen para especificar la posición de un punto: estas direcciones o 'ejes', que son perpendiculares entre sí, se emplean únicamente para expresar las componentes de las diversas magnitudes vectoriales y tensoriales asociadas al punto considerado. Como ejemplo, las dos últimas figuras 6.19 muestran las componentes del tensor de tensiones en el punto P según los ejes r y θ . Al igual que en coordenadas cartesianas, una componente de tensión es positiva si actúa sobre un plano de normal dirigida en la dirección positiva (alternativamente, negativa) de un eje, y además la propia componente de tensión tiene el sentido del eje al que es paralela (alternativamente, sentido contrario), y es negativa en otro caso. Finalmente, un elemento diferencial de dominio se define de manera que sus caras tengan una coordenada (r o θ) constante, al igual que en cartesianas. La primera figura 6.20 muestra un elemento diferencial de dominio en coordenadas polares.



Figuras 6.20.- Elemento diferencial de dominio y tensiones positivas sobre el mismo.

Existen algunas diferencias destacables entre un sistema de coordenadas como el polar y un sistema de coordenadas cartesianas. En el primero, la dirección de los ejes en los que expresamos las componentes de magnitudes varían con la posición considerada, lo que no ocurre en el segundo. Por tanto al observar una magnitud (vectorial o tensorial) en dos puntos distintos el cambio de valor de sus componentes polares se deberá no sólo a que el punto de observación ha cambiado, sino también a que han cambiado las orientaciones de los ejes en los que expresamos las componentes. La consecuencia más inmediata de lo anterior es que las fórmulas que relacionen magnitudes correspondientes a distintos puntos, como por ejemplo las que expresen alguna propiedad referente a todo un diferencial de sólido, tendrán apariencias distintas en coordenadas polares y en cartesianas. El hecho de que una fórmula contenga derivadas espaciales es el indicativo matemático de que la misma relaciona magnitudes asociadas a puntos distintos, y por lo tanto podemos ya adelantar que las expresiones de las ecuaciones de equilibrio interno, las relaciones deformación - desplazamiento, las ecuaciones de Michell y Beltrami, etc, tendrán diferente aspecto en coordenadas polares que en cartesianas. En cambio, las ecuaciones que expresan la ley de Hooke no contienen derivadas, y la forma de estas ecuaciones no se ve alterada (supuesta la isotropía del material).

Para ilustrar lo anterior, planteemos el equilibrio de un elemento diferencial de sólido. Como referencia, la segunda figura 6.20 muestra las componentes positivas de tensión que actúan en el contorno del elemento diferencial. La suma de fuerzas en la dirección

radial r y en la dirección circunferencial θ deben anularse. Para proyectar fuerzas utilizaremos por ejemplo las direcciones r, θ asociadas al punto medio del diferencial que se indica. Por supuesto, la elección de unas ciertas direcciones para proyectar fuerzas no afecta al hecho de que las direcciones r, θ , y por tanto las de las componentes de tensión, dependan del punto considerado dentro del diferencial. Tendremos respectivamente:

$$\begin{aligned} & (\sigma_{rr} + \sigma_{rr,r}dr)(r+dr)d\theta - \sigma_{rr}rd\theta + [(\sigma_{\theta r} + \sigma_{\theta r,\theta}d\theta)dr - \sigma_{\theta r}dr] \cos \frac{d\theta}{2} - \\ & - [(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta,\theta}d\theta)dr + \sigma_{\theta\theta}dr] \sin \frac{d\theta}{2} + X_r r d\theta dr = 0 \\ & (\sigma_{r\theta} + \sigma_{r\theta,r}dr)(r+dr)d\theta - \sigma_{r\theta}rd\theta + [(\sigma_{\theta r} + \sigma_{\theta r,\theta}d\theta)dr + \sigma_{\theta r}dr] \sin \frac{d\theta}{2} + \\ & + [(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta,\theta}d\theta)dr - \sigma_{\theta\theta}dr] \cos \frac{d\theta}{2} + X_\theta r d\theta dr = 0 \end{aligned}$$

Adicionalmente, la igualdad a cero de momentos respecto de un punto cualquiera (por ejemplo el centro del elemento), conduce a $\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r}$. En las igualdades anteriores los diferenciales de primer orden se cancelan exactamente, quedando como significativos los de orden dos. Despreciando los de tercer orden y superiores, aproximando el seno de los diferenciales por los diferenciales y su coseno por la unidad (compruébese que esto produce errores diferenciales de orden superior a dos), agrupando términos y dividiendo entre $r.d\theta.dr$, tenemos:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{rr}}{r} + \frac{\sigma_{r\theta,\theta}}{r} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + X_r &= 0 \\ \sigma_{r\theta,r} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta} + \frac{1}{r}\sigma_{\theta\theta,\theta} + X_\theta &= 0 \end{aligned} \quad (6.33)$$

Las dos ecuaciones de equilibrio anteriores (6.33) no tienen apariencia similar a las correspondientes (2.13) en coordenadas cartesianas. Examinando por ejemplo el proceso de obtención de la primera ecuación (6.33) y comparándola con la primera (2.13), podemos apreciar que los términos $\sigma_{rr,r}$; $\sigma_{r\theta,\theta}/r$; X_r ; se corresponden con los $\sigma_{11,1}$; $\sigma_{12,2}$; X_1 (el factor $1/r$ del segundo de ellos es debido a que θ no mide directamente distancias, y no cabe atribuirle significado especial). Los términos σ_{rr}/r ; $\sigma_{\theta\theta}/r$; no tienen contrapartida en la ecuación de equilibrio en cartesianas. El primero está originado por el hecho de que las caras $r=\text{cte}$ del diferencial no tienen ambas la misma longitud, y el segundo por el hecho de que las caras $\theta=\text{cte}$ no son exactamente paralelas entre sí, como anticipábamos en párrafos precedentes. El término $2\sigma_{r\theta}/r$ que aparece en la segunda ecuación (6.33) tampoco tiene contrapartida en la segunda de (2.13). El lector puede comprobar que este término proviene de dos sumandos, cada uno de los cuales admite una interpretación análoga.

Ecuaciones de campo.

Los párrafos precedentes intentan ilustrar desde un punto de vista físico intuitivo las causas por las que las ecuaciones adoptan formas distintas al emplear sistemas de coordenadas de distinto tipo. Para profundizar en la ilustración de tales diferencias,

hemos llegado a obtener las ecuaciones de equilibrio en coordenadas polares planteando directamente el equilibrio del elemento diferencial. Sin embargo, no es necesario seguir razonamientos físicos de este tipo para obtener ninguna de las ecuaciones de campo. De hecho es posible, y mucho más aconsejable desde el punto de vista de la generalidad del procedimiento y de la seguridad operativa, el contemplar la transformación de coordenadas como una simple manipulación matemática, que puede ser más o menos tediosa, pero cuyo planteamiento no requiere apreciar sutiles detalles geométricos (especialmente en todo lo relativo al tensor de deformaciones; los detalles al respecto pueden consultarse por ej. en el texto de Ortiz, cap. 8, o en el de París, cap.7). Seguidamente se presentará la obtención de las ecuaciones de campo empleando un enfoque matemático. El mismo puede aplicarse convenientemente para otros sistemas usuales de coordenadas ortogonales (polares, esféricas, cilíndricas). Es conveniente recordar que el tratamiento clásico para sistemas de coordenadas generales requiere conceptos más elaborados, y no se incluye aquí, y que el lector interesado puede hallar este tratamiento en el texto de Green y Zerna, o en el de Fung, entre otros.

-Ecuaciones de equilibrio-

Las ecuaciones de equilibrio han sido ya obtenidas mediante razonamientos físicos (ecuaciones (6.33)). Como hemos adelantado, no es necesario realizar un razonamiento físico para cada nuevo sistema de coordenadas en que deseemos expresar las ecuaciones. Es suficiente realizarlo en un sistema (cartesiano por ejemplo), y transformar las ecuaciones resultantes mediante manipulaciones puramente matemáticas. Partimos de las ecuaciones de equilibrio (6.12) en coordenadas cartesianas, y la multiplicamos por $a_{\alpha'\alpha}$ que contiene los cosenos directores del cambio de base de los ejes x_1, x_2 (a los que asignamos el papel de ejes sin prima) a los ejes r, θ (ejes con prima), para que las componentes de la ecuación vectorial queden expresadas en los nuevos ejes r, θ :

$$a_{\alpha\alpha'}\sigma_{\alpha\beta,\beta} + X_{\alpha'} = 0$$

es decir:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2}) \\ (\sigma_{12,1} + \sigma_{22,2}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_r \\ X_\theta \end{bmatrix} = 0 \quad (6.34)$$

Usamos la relación $\sigma_{\alpha\beta} = a_{\alpha\alpha'}\sigma_{\alpha'\beta'}a_{\beta'\beta}$ de cambio de base para expresar las componentes de tensión de la ecuación anterior en ejes r, θ . En forma explícita esta relación es:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{rr} \cos^2 \theta + \sigma_{\theta\theta} \sin^2 \theta - 2\sigma_{r\theta} \sin\theta \cos\theta \\ \sigma_{22} &= \sigma_{rr} \sin^2 \theta + \sigma_{\theta\theta} \cos^2 \theta + 2\sigma_{r\theta} \sin\theta \cos\theta \\ \sigma_{12} &= (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \sin\theta \cos\theta + \sigma_{r\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (6.35)$$

Además necesitamos expresar las derivadas respecto de x_1, x_2 de las componentes de tensión anteriores en función de derivadas respecto de r, θ . Para ello hacemos uso de las relaciones usuales:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}\end{aligned}\quad (6.36)$$

Donde f representa cualquier función, en nuestro caso una componente del tensor de tensiones. Con las ecuaciones (6.34), (6.35) y (6.36) podemos expresar las ecuaciones de equilibrio en coordenadas polares a partir de su expresión en cartesianas. El proceso es tedioso, pero no complicado. Comenzamos buscando la expresión en polares de las cantidades $(\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2})$ y $(\sigma_{12,1} + \sigma_{22,2})$ que aparecen en (6.34). Por ejemplo utilizando las primeras ecuaciones de (6.35) y (6.36) obtenemos $\sigma_{11,1}$:

$$\sigma_{11,1} = \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) [\sigma_{rr} \cos^2 \theta + \sigma_{\theta\theta} \sin^2 \theta - 2\sigma_{r\theta} \sin \theta \cos \theta]$$

El cálculo de $\sigma_{12,2}$, $\sigma_{12,1}$, y $\sigma_{22,2}$ se realiza de modo análogo. Tras operar las expresiones de estos sumandos (de complejidad similar a la del $\sigma_{11,1}$ anterior), y realizar las sumas se obtiene:

$$\begin{aligned}\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} &= \sigma_{rr,r} \cos \theta - \sigma_{r\theta,r} \sin \theta - \frac{\sigma_{\theta\theta,\theta}}{r} \sin \theta + \frac{\sigma_{r\theta,\theta}}{r} \cos \theta + \frac{\sigma_{rr}}{r} \cos \theta - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \cos \theta - 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} \sin \theta \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} &= \sigma_{rr,r} \sin \theta + \sigma_{r\theta,r} \cos \theta + \frac{\sigma_{\theta\theta,\theta}}{r} \cos \theta + \frac{\sigma_{r\theta,\theta}}{r} \sin \theta + \frac{\sigma_{rr}}{r} \sin \theta - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \sin \theta + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} \cos \theta\end{aligned}$$

Finalmente, llevando estas expresiones a (6.34) y simplificando se obtiene:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{r\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{rr}}{r} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + X_r &= 0 \\ \sigma_{r\theta,r} + \frac{\sigma_{\theta\theta,\theta}}{r} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} + X_\theta &= 0\end{aligned}\quad (6.33)$$

Que por supuesto coinciden con las obtenidas mediante razonamientos físicos en el apartado anterior (de hecho se ha utilizado la misma referencia de ecuación, (6.33)).

-Ecuaciones de compatibilidad-

Es también posible emplear razonamientos físicos para obtener las expresiones que ligan las deformaciones con los desplazamientos en coordenadas polares. Para ello se consideran los movimientos de los vértices de un elemento diferencial como el de la figura 6.20, y se calcula el alargamiento unitario de los lados $r=\text{cte}$ y $\theta=\text{cte}$ (que serán ϵ_{rr} y $\epsilon_{\theta\theta}$ respectivamente), y el cierre del ángulo inicialmente recto formado por estos lados (que será $\gamma_{r\theta}$). Este razonamiento puede consultarse por ejemplo en el texto de París o en el de Ortiz. Para obtener estas relaciones mediante transformaciones matemáticas, partimos de las expresiones correspondientes (3.11) en coordenadas cartesianas:

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1}; \quad \varepsilon_{22} = u_{2,2}; \quad \varepsilon_{12} = (u_{1,2} + u_{2,1})/2$$

La ley de transformación para vectores, $u_i = a_{ij} u_j$, en nuestro caso se expresa como:

$$u_1 = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta; \quad u_2 = u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta$$

Aplicando las ecuaciones de derivación (6.36) calculamos las derivadas $u_{1,1}$, $u_{2,2}$, $u_{1,2}$, $u_{2,1}$ en función de r, θ . La expresión de las componentes de deformación resulta:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = u_{1,1} &= (u_{r,r} \cos \theta - u_{\theta,r} \sin \theta) \cos \theta - (u_{r,\theta} \cos \theta - u_{\theta,\theta} \sin \theta - u_r \sin \theta - u_\theta \cos \theta) \frac{\sin \theta}{r} \\ \varepsilon_{22} = u_{2,2} &= (u_{r,r} \sin \theta + u_{\theta,r} \cos \theta) \sin \theta + (u_{r,\theta} \sin \theta + u_{\theta,\theta} \cos \theta + u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta) \frac{\cos \theta}{r} \\ 2\varepsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} &= 2u_{r,r} \sin \theta \cos \theta + u_{\theta,r} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \\ &+ (u_{r,\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 2u_{\theta,\theta} \sin \theta \cos \theta - 2u_r \sin \theta \cos \theta + u_\theta (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)) \frac{1}{r} \end{aligned}$$

Nos interesan las componentes del tensor en coordenadas polares, ε_{rr} , etc. Para hallarlas sólo tenemos que transformar las componentes en cartesianas cuyas expresiones acabamos de obtener, utilizando las ecuaciones de transformación usuales para tensores de orden 2, análogas a las (6.35) pero invertidas:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \varepsilon_{11} \cos^2 \theta + \varepsilon_{22} \sin^2 \theta + 2\varepsilon_{12} \sin \theta \cos \theta \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{11} \sin^2 \theta + \varepsilon_{22} \cos^2 \theta - 2\varepsilon_{12} \sin \theta \cos \theta \\ 2\varepsilon_{r\theta} &= 2(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) \sin \theta \cos \theta + 2\varepsilon_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

Introduciendo las expresiones de ε_{11} , ε_{22} , ε_{12} , en estas ecuaciones, y simplificando (es llamativa la gran cantidad de términos que se cancelan en el proceso de simplificación), obtenemos:

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_{\theta,\theta}}{r} + \frac{u_r}{r}; \quad 2\varepsilon_{r\theta} = u_{\theta,r} + \frac{u_{r,\theta}}{r} - \frac{u_\theta}{r} \quad (6.37)$$

Las ecuaciones (6.37) anteriores son las relaciones que ligan las componentes de desplazamiento con las de deformación en coordenadas polares, y juegan un papel equivalente a las (3.11) en coordenadas cartesianas.

-Ecuaciones de comportamiento-

La expresión de la ley de comportamiento es análoga en cualquier sistema de coordenadas, con tal que el mismo sea ortogonal. La demostración de ello se realiza independientemente de que se trate de comportamiento bi o tridimensional. Por

generalidad, consideremos la ley de comportamiento en tres dimensiones en coordenadas cartesianas, que en su forma (4.40) es:

$$\sigma_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij}$$

Como venimos haciendo, denotaremos con primas en los subíndices a las componentes en los nuevos ejes, y $a_{ii'}$ serán los cosenos entre los ejes de ambos sistemas. Para expresar la ecuación tensorial anterior en los nuevos ejes, multiplicamos toda ella por $a_{ii'}a_{jj'}$:

$$a_{ii'}a_{jj'}\sigma_{ij} = \lambda e a_{ii'}a_{jj'}\delta_{ij} + 2G a_{ii'}a_{jj'}\epsilon_{ij}$$

El primer miembro es claramente $\sigma_{i'j'}$, y el último término del segundo miembro es $2G\epsilon_{i'j'}$. Teniendo en cuenta que el valor de e no depende de cuáles sean los ejes (perpendiculares entre sí) considerados, el primer término del segundo miembro es: $\lambda e a_{ii'}a_{jj'}\delta_{ij} = \lambda e a_{ii'}a_{ij'} = (a_{ii'}=a_{i'i}) = \lambda e a_{i'i}a_{ij'} = (\text{ortogonalidad de la matriz de cosenos}) = \lambda e \delta_{i'j'}$. Por tanto:

$$\sigma_{i'j'} = \lambda e \delta_{i'j'} + 2G \epsilon_{i'j'}$$

Lo que muestra que la ley de comportamiento mantiene su forma en cualquier sistema de ejes perpendiculares entre sí. En particular, la ley de comportamiento para tensión plana y deformación plana en coordenadas polares adoptará formas análogas a las correspondientes en cartesianas, sin más que reemplazar el subíndice 1 por r , y el subíndice 2 por θ . Por ejemplo tenemos que para deformación plana:

$$\epsilon_{rr} = \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}]; \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}]; \quad \epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2G}\sigma_{r\theta} \quad (6.38)$$

Además, siendo z la dirección perpendicular a los ejes r y θ (coincide por tanto con la dirección x_3), se tiene $\epsilon_{rz}=\epsilon_{\theta z}=\epsilon_{zz}=0$; $\sigma_{zz}=\nu(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta})$.

Para tensión plana se tiene:

$$\epsilon_{rr} = \frac{1}{E}[\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}]; \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E}[\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}]; \quad \epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2G}\sigma_{r\theta} \quad (6.39)$$

Y adicionalmente $\epsilon_{zz}=-\nu(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta})/E$; $\epsilon_{rz}=\epsilon_{\theta z}=0$. Otras formas de la ley de comportamiento se obtienen igualmente, sin más que reemplazar los índices correspondientes en las ecuaciones en coordenadas cartesianas.

-Ecuaciones de Beltrami y Michell-

Recordemos que la expresión de esta ecuación para deformación plana en coordenadas cartesianas viene dada por (6.16):

$$\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{1}{1-\nu} \operatorname{div} \mathbf{X}$$

Para tensión plana el factor que multiplica a $\operatorname{div} \mathbf{X}$ es $-(1+\nu)$. La forma más sencilla de expresar en coordenadas polares esta ecuación es probablemente hacer uso de las fórmulas bien conocidas de la divergencia y el Laplaciano en coordenadas polares:

$$\operatorname{div} \mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{X}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{X}_r}{r} ; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (6.40)$$

El operador Laplaciano ∇^2 en su forma anterior se obtiene a partir de su expresión en cartesianas, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$, calculando $\partial^2/\partial x_1^2$ con ayuda de la primera fórmula (6.36), y $\partial^2/\partial x_2^2$ con ayuda de la segunda (6.36). Dado que serán de utilidad posterior, incluimos ahora estos resultados, así como la expresión de $\partial^2/\partial x_1 \partial x_2$, que se obtiene similarmente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} &= \cos \theta \left[\cos \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] - \frac{\sin \theta}{r} \left[-\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} &= \sin \theta \left[\sin \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} - \frac{\cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] + \frac{\cos \theta}{r} \left[\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} &= \sin \theta \cos \theta \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] - (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (6.41)$$

Para obtener la divergencia en la forma dada por (6.40) a partir de su expresión en cartesianas, $\operatorname{div} \mathbf{X} = X_{1,1} + X_{2,2}$, se comienza por expresar $\mathbf{X}$ en coordenadas polares mediante las ecuaciones de transformación usuales (que en nuestro caso son $X_1 = X_r \cos \theta - X_\theta \sin \theta$; $X_2 = X_r \sin \theta + X_\theta \cos \theta$), y después calculando las derivadas, nuevamente con ayuda de (6.36). Con el resultado (6.40), y teniendo en cuenta que $\sigma_{11} + \sigma_{22} = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}$ (primer invariante de tensión), la transformación de las ecuaciones de Michell y Beltrami a coordenadas polares resulta inmediata:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = \frac{-1}{1-\nu} \left(\frac{\partial \mathbf{X}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{X}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{X}_r}{r} \right) \quad (6.42)$$

La expresión anterior corresponde al estado de deformación plana. Para tensión plana la constante que multiplica al paréntesis del segundo miembro es $-(1+\nu)$. Si las fuerzas de volumen $\mathbf{X}$ son adivergentes, $\operatorname{div} \mathbf{X} = 0$, entonces (6.42) adopta la forma de "laplaciano del primer invariante igual a cero", más fácil de recordar, y válida tanto para tensión plana como para deformación plana. Un caso particular frecuente de fuerzas de volumen adivergentes es el caso de fuerzas constantes (típicamente la gravedad). Conviene llamar la atención sobre el hecho de que solamente entendemos que nos encontramos en este

caso si las componentes *cartesianas* son constantes $X_1=\text{cte}$, $X_2=\text{cte}$. Un hipotético caso de componentes polares de $\mathbf{X}$ constantes tendría en general divergencia distinta de cero.

Función de Airy en coordenadas polares.

Para obtener las expresiones que relacionan a la función de Airy con las componentes de tensión en coordenadas polares sólo hay que realizar las transformaciones adecuadas en las expresiones correspondientes en coordenadas cartesianas. Los pasos son los que se enumeran a continuación.

En primer lugar expresamos las componentes cartesianas de tensión σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} , en función de las componentes en coordenadas polares mediante las relaciones de transformación habituales:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sigma_{11} \cos^2 \theta + \sigma_{22} \sin^2 \theta + 2\sigma_{12} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{11} \sin^2 \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta - 2\sigma_{12} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_{r\theta} &= (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\end{aligned}$$

En estas ecuaciones expresamos las componentes cartesianas σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} , como derivadas de la función de Airy. Por ejemplo si las fuerzas de volumen son nulas, aplicaremos (6.25) con este fin. Obtenemos así las componentes polares de tensión en función de derivadas segundas de ϕ respecto de x_1, x_2 ($\phi_{,11}$, etc.). Finalmente transformamos las derivadas segundas para que aparezcan derivadas respecto a r, θ , en lugar de respecto a x_1, x_2 . Para esto último utilizamos las relaciones (6.41). Tras un laborioso proceso de agrupar y simplificar términos, se obtiene (suponiendo fuerzas de volumen nulas, $X_i=0$):

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} ; \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} ; \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \quad (6.43)$$

Puede comprobarse que las tensiones dadas por (6.43) satisfacen automáticamente las ecuaciones de equilibrio (6.33), para cualquier elección de ϕ . Como sabemos, para que además exista un campo de desplazamientos admisible asociado al campo de tensiones, la función ϕ debe ser biarmónica, lo que observando (6.40) se traduce en:

$$\nabla^4 \phi = \nabla^2 (\nabla^2 \phi) = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right] \quad (6.44)$$

Al igual que apuntábamos para coordenadas cartesianas, la solución de un problema elástico se obtiene si se encuentra una función ϕ biarmónica cuyas tensiones asociadas (y en su caso, desplazamientos) se ajusten a las condiciones de contorno del problema.

Función de Airy para problemas planos axisimétricos.

Decimos que un problema plano (tensión o deformación plana) es axisimétrico cuando sus componentes de tensión en coordenadas polares, σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta\theta}$, no dependen de la coordenada circunferencial θ . Apréciase que esta definición se realiza en base a la tensión y no al desplazamiento, que en general puede depender de θ . Por definición, tenemos entonces que las componentes polares de tensión de los problemas planos axisimétricos depende sólo de r . Debe distinguirse entre esta categoría de problemas y los problemas axisimétricos generales, en los que la dependencia se amplía a las variables " r " y " x_3 " (más típicamente denominados " r " y " z " en un sistema de coordenadas cilíndricas).

Existen situaciones en las que es particularmente evidente que las tensiones no dependerán de θ . Como ejemplo, la primera figura 6.21 muestra la sección de una tubería sometida a presión interior, que constituye el caso más típico de problema plano axisimétrico. La segunda figura muestra un disco macizo girando a velocidad constante Ω entorno a su centro, en el que el carácter radial del efecto centrífugo permite también asegurar la independencia de las componentes de tensión respecto de θ , tratándose por tanto de un problema axisimétrico. Incluso si la velocidad de giro no fuera constante, sabemos por lo expuesto en el epígrafe 6.6 que las tensiones no dependerían de θ .

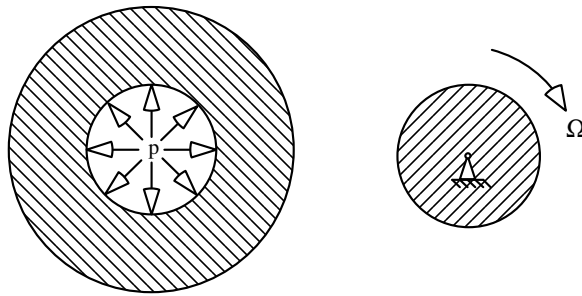
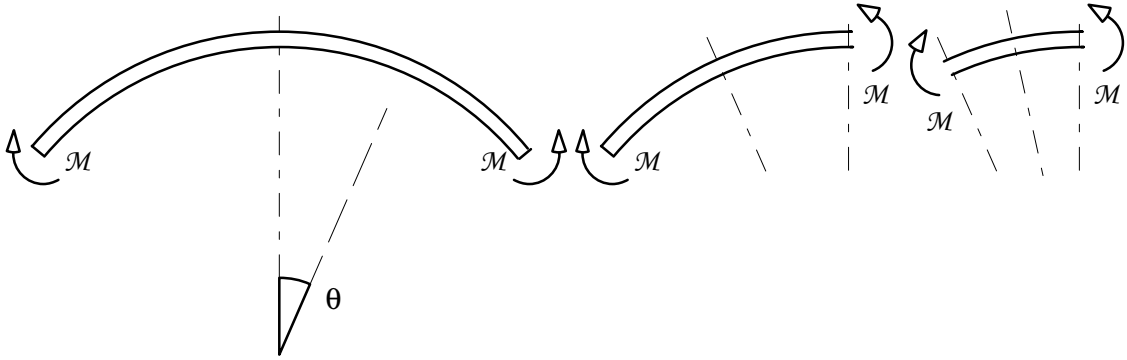


Figura 6.21.- Ejemplos de problemas axisimétricos.

El hecho de que en la clase de problemas que analizamos las componentes de tensión dependan sólo de r , puede inducir incorrectamente a pensar que lo mismo ocurrirá con la función ϕ , ya que de ella derivan las tensiones. Si esto fuese así, sería $\phi=\phi(r)$, y de acuerdo con (6.43), un problema axisimétrico sin fuerzas de volumen siempre tendría $\sigma_{r\theta}$ nula. Sin embargo no hay motivo para que no existan algunas funciones ϕ biarmónicas que dependan de θ (o de r y de θ) cuyas tensiones derivadas según (6.43) dependan sólo de r . Por ejemplo, se comprueba que la sencilla función $\phi=\theta$ es biarmónica, y que de ella derivan tensiones que dependen solamente de r (en particular, $\sigma_{rr}=\sigma_{\theta\theta}=0$; $\sigma_{r\theta}=1/r^2$; compárese con la "solución de la homogénea" en el desarrollo que condujo a (6.31)). No obstante, los problemas axisimétricos planos en los que ϕ depende solamente de r , y que por tanto tienen $\sigma_{r\theta}=0$, constituyen la categoría más usual, y es de la que nos ocuparemos en los párrafos siguientes.

Para apreciar si un problema es axisimétrico en los casos menos obvios, un razonamiento de simetrías sucesivas puede ayudar a dilucidar la cuestión, siempre que la tensión tangencial sea nula. En estos casos, cualquier plano que contenga al eje de simetría debe ser plano de simetría de tensiones (pero recuérdese que si las tensiones

tangenciales $\sigma_{r\theta}$ no fueran nulas, el problema podría ser axisimétrico sin que se cumpla lo anterior, como en el caso del disco giratorio con velocidad no constante, mencionado en el párrafo precedente). Como ejemplo, la primera figura 6.22 muestra una viga de directriz circular sometida a dos momentos en sus extremos. Aceptaremos la aproximación asociada a considerar estos momentos en forma débil, por lo que no especificaremos la distribución concreta de tensión normal $\sigma_{\theta\theta}$ que corresponde a los mismos. Claramente el plano de simetría geométrica lo es también de tensiones. Si aislamos una mitad del sólido (segunda figura 6.22), el equilibrio exige que en el corte exista un momento $\mathcal{M}$, por lo que, al menos en forma débil, tenemos un nuevo problema simétrico del que a su vez podemos considerar una mitad (tercera figura 6.22) para llegar nuevamente a la conclusión de que es otro problema simétrico, y así sucesivamente. El razonamiento muestra que cualquier plano $\theta = \text{cte}$ será plano de simetría de un subproblema análogo al inicial, por lo que el problema es axisimétrico. Por otra parte, se aprecia claramente que en este problema el campo de desplazamientos dependerá de θ , cualquiera que sea la sustentación que le supongamos para eliminar la posibilidad de movimientos de sólido rígido.



Figuras 6.22.- Simetrías sucesivas en un problema axisimétrico sin tensiones $\sigma_{r\theta}$.

Analizaremos a continuación la categoría más usual de problemas planos axisimétricos, en los que la función potencial depende solamente de r : $\phi = \phi(r)$. La condición de biarmonicidad (6.44) se reduce en este caso a:

$$\nabla^4 \phi = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] = \phi_{,rrrr} + \frac{2}{r} \phi_{,rrr} - \frac{1}{r^2} \phi_{,rr} + \frac{1}{r^3} \phi_{,r} = 0 \quad (6.45)$$

Que es una ecuación diferencial ordinaria homogénea de coeficientes variables. Se reduce a coeficientes constantes mediante el cambio de variable $e^t = r$. Tenemos así:

$$\begin{aligned} \phi_{,r} &= \phi_{,t} e^{-t} ; \quad \phi_{,rr} = (\phi_{,tt} - \phi_{,t}) e^{-2t} \\ \phi_{,rrr} &= (\phi_{,ttt} - 3\phi_{,tt} + 2\phi_{,t}) e^{-3t} ; \quad \phi_{,rrrr} = (\phi_{,tttt} - 6\phi_{,ttt} + 11\phi_{,tt} - 6\phi_{,t}) e^{-4t} \end{aligned}$$

Que sustituido en (6.45):

$$\phi_{,tttt} - 4\phi_{,ttt} + 4\phi_{,tt} = 0$$

La ecuación característica asociada a esta ecuación diferencial de coeficientes constantes, $s^4 - 4s^3 + 4s^2 = 0$, tiene dos raíces dobles: $s_1 = s_2 = 0$, $s_3 = s_4 = 2$. Por tanto su solución es: $\phi(t) = At + D + (Bt + C)e^{2t}$. Deshaciendo el cambio de variable tenemos:

$$\phi(r) = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D$$

A, B, C, D, son constantes arbitrarias a determinar mediante condiciones de contorno. A esta función potencial corresponden, de acuerdo con (6.43), las tensiones siguientes:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \phi_{,r} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C \\ \sigma_{\theta\theta} &= \phi_{,rr} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C ; \quad \sigma_{r\theta} = 0 \end{aligned} \quad (6.46)$$

La solución de tensiones (6.46) anterior es válida tanto para tensión plana ($\sigma_{33} = 0$) como para deformación plana ($\sigma_{33} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})$). Es posible calcular sin gran complicación el campo de desplazamientos asociado a esta solución de tensiones, dada la sencillez de esta última. El campo de desplazamientos implica a la ley de comportamiento, la cual es distinta en tensión o en deformación plana. Asumiremos por ejemplo tensión plana, y empezamos considerando la deformación radial:

$$\epsilon_{rr} = \frac{1}{E}(\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}) = \frac{1}{E} \left[\frac{A}{r^2}(1 + \nu) + 2B(1 - \nu) \ln r + B(1 - 3\nu) + 2C(1 - \nu) \right] = \frac{du_r}{dr}$$

Integramos para obtener u_r (una primitiva de $\ln r$ es $r(-1 + \ln r)$). La misma puede contener un término arbitrario $f(\theta)$ dependiente de θ (ya que su derivada respecto de r será nula):

$$u_r = \frac{1}{E} \left[-\frac{1 + \nu}{r} A - (1 + \nu) Br + 2(1 - \nu) Br \ln r + 2(1 - \nu) Cr \right] + f(\theta)$$

La componente circunferencial de deformación es:

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E}(\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}) = \frac{1}{E} \left[-\frac{A}{r^2}(1 + \nu) + B(3 + 2 \ln r - \nu(1 + 2 \ln r)) + 2C(1 - \nu) \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}$$

Llevando el valor de u_r calculado anteriormente al último término de la ecuación anterior, despejando el valor de $u_{\theta,\theta}$, y simplificando términos, se tiene:

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{4Br}{E} - f(\theta)$$

Similarmente a como se razonó en párrafos precedentes, si una función $u_\theta = \psi(r, \theta)$ satisface la ecuación diferencial anterior, también lo hará la función $\psi + g(r)$, siendo $g(r)$ una función arbitraria. Integrando tenemos:

$$u_\theta = \frac{4Br\theta}{E} - \int_0^\theta f(\theta)d\theta + g(r)$$

La función $f(\theta)$ se integra desde el origen $\theta=0$ sin pérdida de generalidad, ya que la eventual elección de otro origen simplemente modificaría la constante arbitraria que puede contener $g(r)$. Finalmente hacemos uso de la condición $\sigma_{r\theta}=0$, que implica:

$$2\varepsilon_{r\theta} = 0 = u_{\theta,r} + \frac{1}{r}u_{r,\theta} - \frac{u_\theta}{r}$$

Por tanto:

$$\left[\frac{4B\theta}{E} + \frac{dg(r)}{dr} \right] + \left[\frac{1}{r} \frac{df(\theta)}{d\theta} \right] + \left[-\frac{4B\theta}{E} + \frac{1}{r} \int_0^\theta f(\theta)d\theta - \frac{1}{r}g(r) \right] = 0$$

Multiplicando este resultado por r obtenemos una suma de términos, cada uno de los cuales depende solamente de r o bien solamente de θ (esta operación no tiene sentido en el punto $r=0$, por lo que los resultados que obtengamos tampoco tendrán sentido en este punto). Para que la suma de una función que depende de r más otra función que depende de θ se anule en todo un rango de valores de las variables, una debe ser en realidad constante de valor K , y la otra también, y de valor $-K$. Tenemos así:

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} + \int_0^\theta f(\theta)d\theta = +K ; \quad r \frac{dg(r)}{dr} - g(r) = -K$$

Siendo K una nueva constante arbitraria. La solución de las ecuaciones integro-diferenciales anteriores se obtiene por simple inspección.

$$f(\theta) = K \text{sen } \theta + L \text{cos } \theta ; \quad g(r) = Mr + K$$

Llevando este resultado a las expresiones de u_i se obtiene el campo de desplazamientos para problemas de tensión plana:

$$u_r = \frac{1}{E} \left[-\frac{1+\nu}{r} A - (1+\nu)Br + 2(1-\nu)Br \ln r + 2(1-\nu)Cr \right] + K \text{sen } \theta + L \text{cos } \theta$$

$$u_\theta = \frac{4Br\theta}{E} + K \text{cos } \theta - L \text{sen } \theta + Mr \quad (6.47)$$

Para problemas de deformación plana el campo de desplazamientos es:

$$u_r = \frac{1}{E} \left[-\frac{1+\nu}{r} A - (1+\nu)Br + 2(1-\nu-2\nu^2)Br \ln r + 2(1-\nu-2\nu^2)Cr \right] + K \text{sen } \theta + L \text{cos } \theta$$

$$u_\theta = (1-\nu^2) \frac{4Br\theta}{E} + K \text{cos } \theta - L \text{sen } \theta + Mr \quad (6.48)$$

Cuando un problema tiene las restricciones de desplazamiento estrictamente suficientes para evitar movimientos de sólido rígido, pueden calcularse a priori las tensiones en todo el contorno (ya que será posible calcular las reacciones en los apoyos planteando el equilibrio del sólido), y por tanto podremos ajustar las constantes del campo de tensiones, A, B, C , empleando sólo las condiciones de contorno en tensiones. En un segundo paso, ajustaremos las constantes adicionales incluidas en el campo de desplazamientos, K, L, M , mediante las condiciones de contorno en desplazamientos. Si existen más restricciones al desplazamiento, este cálculo en dos etapas ya no será posible.

Hay que resaltar la escasez de posibilidades que cubre la solución encontrada bajo la condición $\phi = \phi(r)$, que satisfacen los problemas planos axisimétricos más comunes. Esta solución se concreta en el campo de tensiones (6.46) y en sus desplazamientos asociados (6.47) o (6.48). Examinando la solución de tensiones, vemos que la misma consta de:

- Una presión hidrostática (2C)
- Un término en $1/r^2$, del tipo al encontrado para la "solución de la homogénea" en el problema de la figura 6.13. Este término deberá anularse en los problemas en que exista sólido en el punto $r=0$ ($A=0$ en estos casos)-
- Un término tipo $\ln r$, que está multiplicado por la constante B . Si examinamos la solución de desplazamientos (6.47) apreciamos que u_θ contiene un término lineal en θ multiplicado por B . Debido a ello se obtiene desplazamiento u_θ distinto para el punto (r, θ) y para el punto $(r, \theta + 2\pi)$, que geoméricamente son coincidentes. Por tanto la constante B debe anularse salvo que, como en el problema de la viga curva, el sólido no tenga continuidad al variar θ (en este caso la multiplicidad de desplazamiento puede asignarse a un punto en el que no existe sólido, lo que resulta aceptable).

A la vista de lo anterior, es ciertamente engañoso suponer que bajo la condición $\phi = \phi(r)$ vayamos a hallar una amplia categoría de soluciones. Más realista es asumir que dichas soluciones resolverán un número de problemas tan limitado que acabaremos por reconocerlos en cuanto se nos presenten. Por ello merece la pena revisar brevemente algunos de los problemas más significativos que cabe agrupar en esta categoría, junto con las características más importantes de sus soluciones.

En el problema de una tubería sometida a presión exterior y/o interior, primera de las figuras 6.21, debe ser $B=0$ por continuidad de desplazamientos. Las tensiones σ_{rr} y $\sigma_{\theta\theta}$ serán del tipo $1/r^2 + \text{cte}$.

El problema de la segunda de las figuras 6.21 es un problema con fuerzas de volumen cuya solución podríamos plantear como suma de una solución particular, cuyas componentes de tensión son típicamente del tipo r^2 (ver epígrafes 6.5 y 6.6), más una solución general sin fuerzas de volumen. De momento supongamos velocidad angular constante para no complicar el razonamiento con la presencia de tensiones $\sigma_{r\theta}$. En la solución general de la homogénea, que será axisimétrica del tipo (6.46), debe ser $A=0$, $B=0$, quedando sólo $C \neq 0$. Las tensiones no nulas, σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, tendrán por tanto la forma $r^2 + \text{cte}$.

Si se tratase del mismo problema de un disco girando a velocidad constante, pero con agujero central interior, no habría motivo para que fuese $A=0$, por lo que las componentes no nulas de tensión (σ_{rr} y $\sigma_{\theta\theta}$), serían del tipo $r^2 + 1/r^2 + \text{cte}$.

Si el disco girase con aceleración angular no nula, tendríamos además una tensión $\sigma_{r\theta}$ de la forma $r^2 + 1/r^2$ como indica la solución particular (6.31).

Funciones de Airy en forma de serie. La solución de Michell.

En el epígrafe 6.7 se presentó un enfoque basado en desarrollos en serie de funciones, utilizando coordenadas cartesianas en el análisis. Es posible plantear un procedimiento similar cuando se utilizan coordenadas polares, como veremos en este apartado. Centraremos nuestra atención en el problema del tipo "disco con agujero central" (figura 6.23), en que el sólido tiene continuidad a lo largo de la coordenada θ , y asumiremos por ahora que sólo hay condiciones de contorno en tensiones.

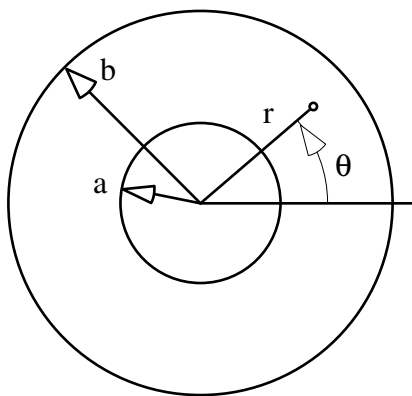


Figura 6.23.- Disco con agujero central.

Pensemos en un desarrollo en serie de funciones periódicas en θ de las tensiones y desplazamientos. Tal desarrollo podrá representar prácticamente cualquier distribución de tensiones (y/o desplazamientos) en los contornos $r=a$, $r=b$. Intentando obtener tensiones y desplazamientos con esta forma, y así una solución general del problema de la figura 6.23, planteamos una función potencial de tensiones de Airy en la forma:

$$\phi = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(r) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(r) \sin k\theta \quad (6.49)$$

Vamos a imponer la biarmonicidad de cada término de la forma $h(r)\cos k\theta$, donde $h(r)$ juega el papel f_k (veremos que g_k y f_k tendrán la misma forma, por lo que $h(r)$ juega en realidad el papel de cualquiera de las dos funciones). En el proceso algebraico de derivación son de utilidad las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{dh}{dr} \right] &= \frac{1}{r} \frac{d^2h}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dh}{dr} & \frac{d^2}{dr^2} \left[\frac{1}{r} \frac{dh}{dr} \right] &= \frac{1}{r} \frac{d^3h}{dr^3} - \frac{2}{r^2} \frac{d^2h}{dr^2} + \frac{2}{r^3} \frac{dh}{dr} \\ \frac{d}{dr} \left[\frac{k^2}{r^2} h \right] &= \frac{k^2}{r^2} \frac{dh}{dr} - \frac{2k^2}{r^3} h & \frac{d^2}{dr^2} \left[\frac{k^2}{r^2} h \right] &= \frac{k^2}{r^2} \frac{d^2h}{dr^2} - \frac{4k^2}{r^3} \frac{dh}{dr} + \frac{6k^2}{r^4} h \end{aligned}$$

Haciendo uso de estas relaciones, y tras operar y agrupar términos, se tiene:

$$\begin{aligned} \nabla^4(h(r) \cos k\theta) &= \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] (h(r) \cos k\theta) = \\ &= \cos k\theta \left[\frac{d^4h}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3h}{dr^3} - \frac{2k^2+1}{r^2} \frac{d^2h}{dr^2} + \frac{2k^2+1}{r^3} \frac{dh}{dr} + \frac{k^4-4k^2}{r^4} h \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.50)$$

Si hubiesemos considerado un término de ϕ de la forma $h(r)\sin k\theta$, hubiesemos obtenido $\sin k\theta$ (en lugar de $\cos k\theta$) multiplicado por el mismo corchete de la expresión anterior. En ambos casos, para que se satisfaga la igualdad a cero en todo el rango de θ , el corchete debe ser nulo. Esta última condición constituye una ecuación diferencial ordinaria de coeficientes no constantes. La misma se transforma en ecuación de coeficientes constantes mediante el cambio $e^t=r$. Con este cambio es $dt/dr=1/r$, y las derivadas de $h(r)$ tienen la expresión:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dr} &= \frac{1}{r} \frac{dh}{dt} & \frac{d^2h}{dr^2} &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{d^2h}{dt^2} - \frac{dh}{dt} \right] \\ \frac{d^3h}{dr^3} &= \frac{1}{r^3} \left[\frac{d^3h}{dt^3} - 3 \frac{d^2h}{dt^2} + 2 \frac{dh}{dt} \right] & \frac{d^4h}{dr^4} &= \frac{1}{r^4} \left[\frac{d^4h}{dt^4} - 6 \frac{d^3h}{dt^3} + 11 \frac{d^2h}{dt^2} - 6 \frac{dh}{dt} \right] \end{aligned}$$

Llevando estos valores de las derivadas al corchete de (6.50), agrupando términos, e igualando a cero tenemos:

$$\frac{d^4h}{dt^4} - 4 \frac{d^3h}{dt^3} + (4 - 2k^2) \frac{d^2h}{dt^2} + 4k^2 \frac{dh}{dt} + (k^4 - 4k^2)h = 0$$

Planteamos la ecuación característica de esta ecuación diferencial de coeficientes constantes, y obtenemos sus raíces:

$$s^4 - 4s^3 + (4 - 2k^2)s^2 + 4k^2s + (k^4 - 4k^2) = 0$$

$$\Rightarrow s_1 = k+2; s_2 = -k+2; s_3 = k; s_4 = -k;$$

La solución para un valor dado de k es, por tanto, de la forma:

$$h_k(r(t)) = A_k e^{(k+2)t} + B_k e^{(-k+2)t} + C_k e^{kt} + D_k e^{-kt}$$

Donde $A_k, \dots, D_k$, son constantes indeterminadas, distintas para cada valor de k . Des haciendo el cambio de variable tenemos:

$$h_k(r) = A_k r^{k+2} + B_k r^{-k+2} + C_k r^k + D_k r^{-k} \quad (6.51)$$

La solución anterior es válida salvo para $k=0$ y para $k=1$, ya que como se aprecia, en estos casos la ecuación característica tiene raíces múltiples. Para $k=0$ tenemos dos raíces dobles, $s_1=s_2=2$; $s_3=s_4=0$; y la solución es:

$$h_0(r) = (A_0 + B_0 t)e^{2t} + C_0 t + D_0 = A_0 r^2 + B_0 r^2 \ln r + C_0 \ln r + D_0 \quad (6.52)$$

Para $k=1$ las raíces son $s_1=3$; $s_2=s_3=1$; $s_4=-1$. Tenemos por tanto:

$$h_1(r) = A_1 e^{3t} + (B_1 t + C_1)e^t + D_1 e^{-t} = A_1 r^3 + B_1 r \ln r + C_1 r + D_1 / r \quad (6.53)$$

La forma de la función $h_k(r)$, $k=0 \dots \infty$, dada por (6.51), (6.52) y (6.53), es la forma de las funciones $f_k(r)$, y $g_k(r)$, si bien las constantes indeterminadas de g_k serán distintas de las de f_k . Llamaremos A_k, B_k, C_k, D_k , a las asociadas a f_k , y A'_k, B'_k, C'_k, D'_k , a las asociadas a g_k . Hemos determinado así la forma de las funciones que introducimos en el desarrollo en serie (6.49) de la función potencial ϕ . Veamos ahora qué forma tienen las tensiones que derivan de ella según las relaciones (6.43), que reproducimos por comodidad:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}; \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right]; \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}; \quad \Rightarrow$$

$$\sigma_{rr} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{r} \frac{df_k}{dr} - \frac{f_k}{r^2} k^2 \right] \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{r} \frac{dg_k}{dr} - \frac{g_k}{r^2} k^2 \right] \sin k\theta \quad (6.54)$$

$$\sigma_{r\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{k g_k}{r^2} - \frac{k}{r} \frac{dg_k}{dr} \right] \cos k\theta + \sum_{k=0}^{\infty} \left[-\frac{k f_k}{r^2} + \frac{k}{r} \frac{df_k}{dr} \right] \sin k\theta \quad (6.55)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^2 f_k}{dr^2} \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^2 g_k}{dr^2} \sin k\theta$$

El último sumatorio de (6.55) comienza en $k=0$ por coherencia operativa, aunque el sumando correspondiente es evidentemente nulo. Nos interesa la evolución de las

componentes σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$, en círculos $r=\text{cte}$, ya que los contornos de la figura 6.23 tienen precisamente la forma $r=\text{cte}$, y en ellos tendremos que ajustar las condiciones de contorno en tensiones, que vendrán expresadas como valores prescritos de σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$ en función de θ , para $r=a$ y $r=b$. Denotaremos como $\sigma_{rr}^*(r=a)$, $\sigma_{rr}^*(r=b)$, $\sigma_{r\theta}^*(r=a)$, $\sigma_{r\theta}^*(r=b)$ a las funciones de θ que expresan las condiciones de contorno del problema. Apreciamos que particularizando (6.54) y (6.55) en $r=a$, $r=b$, las componentes de tensión adoptan forma de desarrollo en serie de Fourier, jugando θ el papel de variable independiente. Las condiciones de contorno en tensiones admitirán a su vez un desarrollo en serie de Fourier en función de θ (cuyos coeficientes podremos calcular mediante las técnicas estándar del análisis armónico) como el siguiente:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^*(r=a) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} a'_k \sin k\theta ; & \sigma_{rr}^*(r=b) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} b'_k \sin k\theta \\ \sigma_{r\theta}^*(r=a) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha'_k \sin k\theta ; & \sigma_{r\theta}^*(r=b) &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \beta'_k \sin k\theta\end{aligned}\quad (6.56)$$

Para un valor dado de k , tendremos en (6.56) los ocho coeficientes conocidos, a_k , b_k , α_k , β_k , a'_k , b'_k , α'_k , β'_k . Cada coeficiente debe ser igual a un corchete de (6.54) o (6.55). Por ejemplo el coeficiente a_k debe ser igual al primer corchete de (6.54) particularizado en $r=a$. Este corchete contendrá los cuatro parámetros de f_k , es decir a A_k , B_k , C_k , y D_k . Podemos realizar ocho identificaciones de este tipo (los cuatro corchetes de (6.54) y (6.55) particularizados en $r=a$ o $r=b$, identificados con el correspondiente coeficiente de (6.56)), lo que proporciona ocho ecuaciones que permitirán calcular los ocho parámetros contenidos en los corchetes a través de f_k y g_k : A_k , B_k , C_k , D_k , A'_k , B'_k , C'_k , y D'_k . En resumen, el cálculo de los parámetros de f_k y g_k se reduce a resolver el siguiente sistema de 8 ecuaciones con 8 incógnitas para cada valor de k :

$$\begin{aligned}a_k &= \left[\frac{1}{r} \frac{df_k}{dr} - \frac{f_k}{r^2} k^2 \right]_{r=a} ; & a'_k &= \left[\frac{1}{r} \frac{dg_k}{dr} - \frac{g_k}{r^2} k^2 \right]_{r=a} \\ b_k &= \left[\frac{1}{r} \frac{df_k}{dr} - \frac{f_k}{r^2} k^2 \right]_{r=b} ; & b'_k &= \left[\frac{1}{r} \frac{dg_k}{dr} - \frac{g_k}{r^2} k^2 \right]_{r=b} \\ \alpha_k &= \left[\frac{kg_k}{r^2} - \frac{k}{r} \frac{dg_k}{dr} \right]_{r=a} ; & \alpha'_k &= \left[-\frac{kf_k}{r^2} + \frac{k}{r} \frac{df_k}{dr} \right]_{r=a} \\ \beta_k &= \left[\frac{kg_k}{r^2} - \frac{k}{r} \frac{dg_k}{dr} \right]_{r=b} ; & \beta'_k &= \left[-\frac{kf_k}{r^2} + \frac{k}{r} \frac{df_k}{dr} \right]_{r=b}\end{aligned}\quad (6.57)$$

La discusión anterior, así como la forma (6.57) del sistema de ecuaciones, no es válida para $k=0$ y $k=1$, valores para los que las funciones f y g degeneran, en el sentido que se explica a continuación.

Para $k=0$ solamente hay que identificar cuatro coeficientes de (6.56) (a_0 , b_0 , α_0 , β_0) con cuatro corchetes de (6.54) y (6.55). Al plantear dicha identificación resulta lo siguiente:

$$a_o = \left[\frac{1}{r} \frac{df_o}{dr} \right]_{r=a} ; \quad b_o = \left[\frac{1}{r} \frac{df_o}{dr} \right]_{r=b} ; \quad \alpha_o = 0 ; \quad \beta_o = 0$$

Las dos últimas igualdades a cero, las cuales se obtienen porque en (6.55) no existe un término independiente de θ con el que realizar una identificación, suponen una incompatibilidad, puesto que α_o y β_o tienen valores dados a priori que dependen de las condiciones de contorno, y no tienen porqué ser nulos. Apreciamos que la incompatibilidad surge porque la expresión en serie de ϕ que hemos construido es incapaz de representar una tensión $\sigma_{r\theta} = \text{cte}$ en una circunferencia. Esto evidencia una carencia de nuestra expresión de ϕ . Notemos también que en las dos primeras expresiones anteriores desaparece la constante indeterminada D_o . La incompatibilidad no se hubiera dado si en ϕ hubiese habido un término del que derivase tensión $\sigma_{r\theta} = \text{cte}$ en $r = \text{cte}$, término al que hubiésemos podido asignar la desaparecida constante D_o . Tal como hemos propuesto la forma de ϕ , este hipotético término no ha aparecido, y lo cierto es que de momento somos incapaces de determinar las constantes asociadas a $k=0$. Antes de resolver esta carencia, analizaremos alguna otra que también presenta nuestra propuesta (6.49) para ϕ , que a la vista de lo anterior debemos considerar como provisional.

Para $k=1$ la identificación de coeficientes revierte a la forma general (6.57), con f_1 y g_1 ajustándose a la expresión (6.53). Todos los corchetes de (6.57) adoptan para este valor, $k=1$, una misma forma, que salvo el signo es:

$$\frac{1}{r} \frac{dh_1}{dr} - \frac{h_1}{r^2} = (2r)A_1 + (1/r)B_1 - (2/r^3)D_1$$

Es inmediato que lo anterior convierte al sistema (6.57) en incompatible: en efecto, para que se satisficiera tendría que ser $a_1 = \alpha'_1$, $b_1 = \beta'_1$, $a'_1 = -\alpha_1$, $b'_1 = -\beta_1$, relaciones que en general son incompatibilidades, dado que todos esos coeficientes vienen dados por las condiciones de contorno, sin que deban guardar relación entre ellos salvo para asegurar el equilibrio global del sólido. Hay que notar que la constante C_1 , y análogamente C'_1 , ha desaparecido de la expresión de las tensiones (ver ecuación anterior). Hubiese sido preferible haber tenido en ϕ un término en C_1 tipo $f_1 C_1 \cos \theta$, donde f_1 dependiese también de θ (lo mismo cabe decir para C'_1), con lo que el sistema de ecuaciones (que ya no sería exactamente (6.57)) tendría ocho ecuaciones y ocho incógnitas. Lamentaciones aparte, por ahora tampoco podemos determinar los coeficientes asociados a f_1 y g_1 .

Antes de intentar remediar las deficiencias de nuestra ϕ para $k=0,1$, llamemos la atención sobre el hecho de que era esperable que el término D_o (de f_o) así como los términos $C_1 r$ y $C'_1 r$ (de f_1 y g_1 respectivamente), no apareciesen en las tensiones. En efecto, llevando estos términos a (6.49) apreciamos que su aportación a ϕ es una función lineal de x_1 , x_2 (coordenadas cartesianas), que como sabemos siempre desaparece en el proceso de derivación al obtener las tensiones:

$$D_o + C_1 r \cos \theta + C'_1 r \sin \theta = D_o + C_1 x_1 + C'_1 x_2 \quad (6.58)$$

Como última reflexión preliminar, nótese que la forma en serie de la función de tensiones ϕ que hemos encontrado no es degenerada en sí misma, ya que incluso los términos de (6.58) tienen la forma requerida de términos de Fourier, y son independientes de los demás términos del desarrollo. El problema está en que dichos términos producen tensiones nulas, y sus constantes indeterminadas desaparecen de la expresión de las tensiones. Es claro que para remediarlo tendremos que descartar estos términos legítimos del desarrollo en serie de Fourier de ϕ , y poner otros en su lugar, que no serán por tanto legítimos en ese sentido. Esto carece de importancia, ya que nuestro interés es conseguir desarrollos de Fourier completos de las tensiones σ_{rr} y $\sigma_{r\theta}$, no de ϕ que es sólo una herramienta. Los nuevos términos (no legítimos) de ϕ serán útiles en cuanto que proporcionen términos (legítimos) de Fourier de las tensiones.

Los términos degenerantes de ϕ para $k=1$, que son de la forma $C_1 r \cos\theta$ y $C'_1 r \sin\theta$, proceden de la raíz $s=1$, que es eventualmente una raíz doble ($s_2=-k+2=1$, $s_3=k=1$). Buscaremos nuevos términos de ϕ asociados a esta raíz mediante el artificio matemático siguiente. Pensemos por el momento que k pueda ser no entero. Si consideramos un ε arbitrariamente pequeño y tomamos $k=1+\varepsilon$, tendremos las dos raíces $s_2=1-\varepsilon$, $s_3=1+\varepsilon$, muy próximas pero distintas. Si tomamos $k=1-\varepsilon$, las raíces correspondientes serán $s_2=1+\varepsilon$, $s_3=1-\varepsilon$. Escribamos los términos de (6.49) correspondientes a estas raíces s_2 y s_3 para cada uno de estos dos valores de k . Nótese que ninguno de dichos valores de k implica en rigor raíces dobles, por lo que debemos incluir en f_k y g_k los términos del tipo segundo y tercero de (6.51):

$$\begin{aligned}\phi = & \dots + (A r^{1-\varepsilon} + B r^{1+\varepsilon}) \cos((1+\varepsilon)\theta) + (A' r^{1-\varepsilon} + B' r^{1+\varepsilon}) \sin((1+\varepsilon)\theta) \\ & + (C r^{1+\varepsilon} + D r^{1-\varepsilon}) \cos((1-\varepsilon)\theta) + (C' r^{1+\varepsilon} + D' r^{1-\varepsilon}) \sin((1-\varepsilon)\theta)\end{aligned}$$

Perseguiremos que aparezca la derivada de alguno de los términos anteriores. Comenzamos desagrupando términos y hacemos tender ε a cero directamente en los sumandos que contienen A , C , A' , y C' , sobre los que no realizaremos más manipulación:

$$\begin{aligned}\phi = & \dots + (A + C) r \cos\theta + B r^{1+\varepsilon} \cos((1+\varepsilon)\theta) + D r^{1-\varepsilon} \cos((1-\varepsilon)\theta) + \\ & + (A' + C') r \sin\theta + B' r^{1+\varepsilon} \sin((1+\varepsilon)\theta) + D' r^{1-\varepsilon} \sin((1-\varepsilon)\theta)\end{aligned}$$

Como las constantes son arbitrarias, podemos hacer aparecer la suma y la diferencia de los términos que multiplican a B y a D , definiendo dos nuevas constantes arbitrarias $E=(B+D)/2$, $F=(B-D)/2$ (análogamente para las constantes con prima correspondientes a términos en seno):

$$\begin{aligned}\phi = & \dots + (A + C) r \cos\theta + (A' + C') r \sin\theta + \\ & + E \left[r^{1+\varepsilon} \cos((1+\varepsilon)\theta) + r^{1-\varepsilon} \cos((1-\varepsilon)\theta) \right] + F \left[r^{1+\varepsilon} \cos((1+\varepsilon)\theta) - r^{1-\varepsilon} \cos((1-\varepsilon)\theta) \right] + \\ & + E' \left[r^{1+\varepsilon} \sin((1+\varepsilon)\theta) + r^{1-\varepsilon} \sin((1-\varepsilon)\theta) \right] + F' \left[r^{1+\varepsilon} \sin((1+\varepsilon)\theta) - r^{1-\varepsilon} \sin((1-\varepsilon)\theta) \right]\end{aligned}$$

Dejamos tender ε a cero en los términos en E y E' , que no manipularemos más. Los corchetes de los términos en F y en F' tienen casi la forma de derivada que queremos

conseguir. Para evitar que tiendan a cero definimos una nueva constante arbitraria G de manera que $F=G/(2\varepsilon)$ (también $F'=G'/(2\varepsilon)$):

$$\phi = \dots + (A + C + 2E)r \cos \theta + (A' + C' + 2E')r \sin \theta + \\ + G \frac{r^{1+\varepsilon} \cos((1+\varepsilon)\theta) - r^{1-\varepsilon} \cos((1-\varepsilon)\theta)}{2\varepsilon} + G' \frac{r^{1+\varepsilon} \sin((1+\varepsilon)\theta) - r^{1-\varepsilon} \sin((1-\varepsilon)\theta)}{2\varepsilon}$$

Al tender ε a cero, las fracciones que multiplican a G y a G' representan respectivamente las derivadas respecto de s de las funciones $r^s \cos(s\theta)$, $r^s \sin(s\theta)$, ambas evaluadas en $s=1$. Por tanto:

$$\phi = \dots + (A + C + 2E)r \cos \theta + (A' + C' + 2E')r \sin \theta + \\ + G[r \ln r \cos \theta - r\theta \sin \theta] + G'[r \ln r \sin \theta + r\theta \cos \theta]$$

Analicemos los términos que hemos obtenido. Los términos en $r \cos \theta$, $r \sin \theta$ son de la forma degenerada que ya se obtuvo en (6.53). Los términos en $r \ln r \cos \theta$, $r \ln r \sin \theta$ no degeneran, pero también fueron obtenidos en (6.53). Los términos tipo $r\theta \sin \theta$, $r\theta \cos \theta$, son en cambio novedosos. Las tensiones que derivan de ellos son $\sigma_{rr}=2r^{-1} \cos \theta$, para el primero y $\sigma_{rr}=2r^{-1} \sin \theta$ para el segundo, siendo en ambos casos $\sigma_{r\theta}=\sigma_{\theta\theta}=0$. Estos dos términos de tensión tienen forma correcta de términos de Fourier de σ_{rr} (para $r=\text{cte}$). Claramente, nuestra decisión es eliminar de (6.49) los términos $C_1 r \cos \theta$ y $C'_1 r \sin \theta$ de ϕ , y sustituirlos respectivamente por $C_1 r\theta \sin \theta$ y $C'_1 r\theta \cos \theta$ (de esta manera C_1 sigue estando asociado a un término tipo $\cos \theta$ de σ_{rr} , y C'_1 a uno tipo $\sin \theta$). Con estos nuevos términos C_1 y C'_1 no desaparecen de la formulación, y además se obtiene un sistema compatible de ocho ecuaciones con ocho incógnitas. Es evidente que este sistema de ecuaciones ya no tendrá exactamente la forma (6.57), debido a los nuevos términos introducidos en los corchetes de (6.54) y (6.55). Con esta modificación a ϕ conseguimos por tanto resolver la incompatibilidad en lo que a $k=1$ se refiere.

El término degenerante de ϕ para $k=0$, de la forma constante D_0 , procede de la raíz $s=0$, que eventualmente es una raíz doble ($s_3=s_4=0$). Aplicaremos la misma idea que en los párrafos anteriores para obtener un nuevo término asociado a esta raíz. Con el objeto de no repetir todo el desarrollo, apreciamos que finalmente los cálculos conducirán a que el nuevo término se obtendrá de la derivación respecto de s de $r^s \cos(s\theta)$, y de $r^s \sin(s\theta)$, particularizadas en el valor de la raíz, que esta vez es $s=0$. Obtenemos así términos de la forma $r^s \ln r \cos(s\theta)$, $-r^s \theta \sin(s\theta)$, $r^s \ln r \sin(s\theta)$, $r^s \theta \cos(s\theta)$ que en $s=0$ conducen a $\ln r$ (ya obtenido, ver (6.52)), y θ , que es novedoso. Precisamente de $\phi=0$ derivan tensiones $\sigma_{r\theta}=1/r^2$, $\sigma_{rr}=\sigma_{\theta\theta}=0$, que aporta el término de tensión $\sigma_{r\theta}=\text{cte}$ para $r=\text{cte}$, que habíamos echado en falta. Una vez mas, nuestra decisión es descartar el término constante D_0 de ϕ , y en su lugar poner uno de la forma $D_0 \theta$. Con esta modificación se resuelve la incompatibilidad también en lo que a $k=0$ se refiere.

Encontrado el modo de resolver las incompatibilidades para $k=0,1$, modificamos convenientemente nuestra propuesta inicial (6.49) de función potencial, que pasa a ser:

$$\begin{aligned}
\phi = & A_0 r^2 + B_0 r^2 \ln r + C_0 \ln r + D_0 \theta + \\
& + [A_1 r^3 + B_1 r \ln r + D_1 / r] \cos \theta + C_1 r \theta \sin \theta + \\
& + [A'_1 r^3 + B'_1 r \ln r + D'_1 / r] \sin \theta + C'_1 r \theta \cos \theta + \\
& + \sum_{k=2}^{\infty} [A_k r^{k+2} + B_k r^{k-2} + C_k r^k + D_k r^{-k}] \cos k\theta + \\
& + \sum_{k=2}^{\infty} [A'_k r^{k+2} + B'_k r^{k-2} + C'_k r^k + D'_k r^{-k}] \sin k\theta
\end{aligned} \tag{6.59}$$

Tomando tantos términos de ϕ como sea preciso, podemos aproximar con tanta exactitud como deseemos las condiciones de contorno del problema de la figura (6.23), ya que conseguiremos sucesivos términos del desarrollo en serie de Fourier de las condiciones de contorno. Por tanto (6.59) ofrece una solución general de dicho problema, siempre que las condiciones de contorno admitan desarrollo en serie de Fourier. Esta solución general se conoce como solución de Michell, quien la presentó en 1899 como recopilación de soluciones particulares. La tabla siguiente recoge los términos de tensión asociados a cada componente de la función de Airy (6.59). La información así presentada permite escoger unos pocos términos que sean los adecuados para representar las condiciones de contorno de un problema particular.

FUNCIÓN DE AIRY EN COORDENADAS POLARES

COMPONENTES DE TENSIÓN

ϕ	σ_{rr}	$\sigma_{r\theta}$	$\sigma_{\theta\theta}$
(k=0)			
r^2	2	0	2
$r^2 \ln r$	$2 \ln r + 1$	0	$2 \ln r + 3$
$\ln r$	$1/r^2$	0	$-1/r^2$
θ	0	$1/r^2$	0
(k=1)			
$r^3 \cos \theta$	$2r \cos \theta$	$2r \sin \theta$	$6r \cos \theta$
$r\theta \sin \theta$	$2r^{-1} \cos \theta$	0	0
$r \ln r \cos \theta$	$r^{-1} \cos \theta$	$r^{-1} \sin \theta$	$r^{-1} \cos \theta$
$r^{-1} \cos \theta$	$-2r^{-3} \cos \theta$	$-2r^{-3} \sin \theta$	$2r^{-3} \cos \theta$
$r^3 \sin \theta$	$2r \sin \theta$	$-2r \cos \theta$	$6r \sin \theta$
$r\theta \cos \theta$	$-2r^{-1} \sin \theta$	0	0
$r \ln r \sin \theta$	$r^{-1} \sin \theta$	$-r^{-1} \cos \theta$	$r^{-1} \sin \theta$
$r^{-1} \sin \theta$	$-2r^{-3} \sin \theta$	$2r^{-3} \cos \theta$	$2r^{-3} \sin \theta$
(k=n)			
$r^{n+2} \cos n\theta$	$-(n+1)(n-2)r^n \cos n\theta$	$n(n+1)r^n \sin n\theta$	$(n+1)(n+2)r^n \cos n\theta$
$r^{-n+2} \cos n\theta$	$-(n+2)(n-1)r^{-n} \cos n\theta$	$-n(n-1)r^{-n} \sin n\theta$	$(n-1)(n-2)r^{-n} \cos n\theta$
$r^n \cos n\theta$	$-n(n-1)r^{n-2} \cos n\theta$	$n(n-1)r^{n-2} \sin n\theta$	$n(n-1)r^{n-2} \cos n\theta$
$r^{-n} \cos n\theta$	$-n(n+1)r^{-n-2} \cos n\theta$	$-n(n+1)r^{-n-2} \sin n\theta$	$n(n+1)r^{-n-2} \cos n\theta$
$r^{n+2} \sin n\theta$	$-(n+1)(n-2)r^n \sin n\theta$	$-n(n+1)r^n \cos n\theta$	$(n+1)(n+2)r^n \sin n\theta$
$r^{-n+2} \sin n\theta$	$-(n+2)(n-1)r^{-n} \sin n\theta$	$n(n-1)r^{-n} \cos n\theta$	$(n-1)(n-2)r^{-n} \sin n\theta$
$r^n \sin n\theta$	$-n(n-1)r^{n-2} \sin n\theta$	$-n(n-1)r^{n-2} \cos n\theta$	$n(n-1)r^{n-2} \sin n\theta$
$r^{-n} \sin n\theta$	$-n(n+1)r^{-n-2} \sin n\theta$	$n(n+1)r^{-n-2} \cos n\theta$	$n(n+1)r^{-n-2} \sin n\theta$

El cálculo de los desplazamientos correspondientes a un determinado término de ϕ , ecuación (6.59), se realiza mediante integración de las deformaciones asociadas a las componentes de tensión que derivan del mismo. El proceso siempre sigue los mismos pasos empleados para obtener los desplazamientos de los problemas axisimétricos (6.47) o (6.48). Seguidamente se resume este proceso:

Se comienza calculando las deformaciones a partir de las tensiones a través de la ley de comportamiento. Realizado esto, se tienen las deformaciones en función de derivadas de ϕ , con sus coeficientes indeterminados correspondientes.

Seguidamente emplea la primera ecuación (6.37) para obtener u_r como la integral de ϵ_{rr} más una función de θ indeterminada.

A continuación se emplea la segunda (6.37), en la que se introduce la expresión de $\epsilon_{\theta\theta}$, así como la recién calculada de u_r . Con la ecuación así conseguida se calcula u_θ mediante integración de $u_{\theta,\theta}$. A la primitiva que se encuentre debe sumársele una función de r indeterminada.

Finalmente se sustituyen las expresiones encontradas de u_r , u_θ , así como $\epsilon_{r\theta}$, en la tercera (6.37). Esto produce una ecuación que puede escribirse de forma que cada sumando dependa solamente de r o solamente de θ . Se reescribe la ecuación con todos los términos que dependen de r en un miembro, y los que dependen de θ en el otro, y se razona que dicha ecuación sólo puede cumplirse en todo un rango de valores de r y θ si ambos miembros son constantes. Se iguala pues cada miembro a la misma constante arbitraria. Esto proporciona dos ecuaciones diferenciales desacopladas, una en r y otra en θ . La integración de una de ellas permite calcular la función indeterminada de r , y la integración de la otra la función indeterminada de θ (en ambos casos salvo una constante indeterminada).

Del proceso de integración anterior resultan tres constantes indeterminadas, cuyos términos siempre representan un movimiento de sólido rígido, como cabía esperar (ver epígrafe 3.6). Dichas constantes pueden calcularse mediante la imposición de condiciones de contorno en desplazamientos.

Los desplazamientos obtenidos mediante el procedimiento descrito para las tensiones asociadas a cada término de (6.59), se recogen en la tabla siguiente. Nótese que los desplazamientos dependen de las constantes elásticas, y también de si el problema es de tensión o de deformación plana, como esperábamos. El movimiento arbitrario como sólido rígido mencionado en el párrafo anterior no se reproduce en la tabla por concisión. Se debe tener presente por tanto que a los desplazamientos que figuran siempre podría sumárseles un movimiento como sólido rígido, que en coordenadas polares tiene la forma:

$$u_r = A \cos \theta + B \sin \theta ; \quad u_\theta = -A \sin \theta + B \cos \theta + C r$$

FUNCIÓN DE AIRY EN COORDENADAS POLARES

COMPONENTES DE DESPLAZAMIENTO

ϕ	$2Gu_r$	$2Gu_\theta$
(k=0)		
r^2	$(\kappa-1)r$	0
$r^2 \ln r$	$(\kappa-1)r \ln r - r$	$(\kappa+1)r\theta$
$\ln r$	$-1/r$	0
θ	0	$-1/r$
(k=1)		
$r^3 \cos \theta$	$(\kappa-2)r^2 \cos \theta$	$(\kappa+2)r^2 \sin \theta$
$r\theta \sin \theta$	$\frac{1}{2}[(\kappa-1)\theta \sin \theta - \cos \theta +$ $+(\kappa+1)\ln r \cos \theta]$	$\frac{1}{2}[(\kappa-1)\theta \cos \theta - \sin \theta -$ $-(\kappa+1)\ln r \sin \theta]$
$r \ln r \cos \theta$	$\frac{1}{2}[(\kappa+1)\theta \sin \theta - \cos \theta +$ $+(\kappa-1)\ln r \cos \theta]$	$\frac{1}{2}[(\kappa+1)\theta \cos \theta - \sin \theta -$ $-(\kappa-1)\ln r \sin \theta]$
$r^{-1} \cos \theta$	$r^{-2} \cos \theta$	$r^{-2} \sin \theta$
$r^3 \sin \theta$	$(\kappa-2)r^2 \sin \theta$	$-(\kappa+2)r^2 \cos \theta$
$r\theta \cos \theta$	$\frac{1}{2}[(\kappa-1)\theta \cos \theta + \sin \theta -$ $-(\kappa+1)\ln r \sin \theta]$	$\frac{1}{2}[-(\kappa-1)\theta \sin \theta - \cos \theta -$ $-(\kappa+1)\ln r \cos \theta]$
$r \ln r \sin \theta$	$\frac{1}{2}[-(\kappa+1)\theta \cos \theta - \sin \theta +$ $+(\kappa-1)\ln r \sin \theta]$	$\frac{1}{2}[(\kappa+1)\theta \sin \theta + \cos \theta +$ $+(\kappa-1)\ln r \cos \theta]$
$r^{-1} \sin \theta$	$r^{-2} \sin \theta$	$-r^{-2} \cos \theta$
(k=n)		
$r^{n+2} \cos n\theta$	$(\kappa-n-1)r^{n+1} \cos n\theta$	$(\kappa+n+1)r^{n+1} \sin n\theta$
$r^{-n+2} \cos n\theta$	$(\kappa+n-1)r^{-n+1} \cos n\theta$	$-(\kappa-n+1)r^{-n+1} \sin n\theta$
$r^n \cos n\theta$	$-nr^{n-1} \cos n\theta$	$nr^{n-1} \sin n\theta$
$r^{-n} \cos n\theta$	$nr^{-n-1} \cos n\theta$	$nr^{-n-1} \sin n\theta$
$r^{n+2} \sin n\theta$	$(\kappa-n-1)r^{n+1} \sin n\theta$	$-(\kappa+n+1)r^{n+1} \cos n\theta$
$r^{-n+2} \sin n\theta$	$(\kappa+n-1)r^{-n+1} \sin n\theta$	$(\kappa-n+1)r^{-n+1} \cos n\theta$
$r^n \sin n\theta$	$-nr^{n-1} \sin n\theta$	$-nr^{n-1} \cos n\theta$
$r^{-n} \sin n\theta$	$nr^{-n-1} \sin n\theta$	$-nr^{-n-1} \cos n\theta$

Deformación Plana: $\kappa = 3 - 4\nu$; Tensión Plana: $\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$

Los desplazamientos pueden incluir además un movimiento de sólido rígido.

Conviene llamar la atención sobre el hecho de que algunos términos u_r o u_θ de la tabla de desplazamientos son lineales en θ , como por ejemplo el correspondiente al conocido término axisimétrico $\phi = r^2 \ln r$. Estos términos son en realidad incompatibles con la continuidad de desplazamientos si la geometría es la de la figura 6.23, ya que en ella la solución debe ser válida en todo el rango $0-2\pi$ de valores de θ , y se obtendrían desplazamientos distintos para $\theta=0$ y $\theta=2\pi$ (para un r dado), que describen el mismo punto del sólido. Los términos de este tipo son en cambio admisibles si el sólido tiene contornos $\theta=\text{cte}$, es decir, presenta discontinuidad al variar θ con $r=\text{cte}$. En estos casos sólo se requiere que la solución matemática de desplazamientos sea univaluada en el rango de θ ocupado por el sólido. Al ser éste menor que 2π , no se incurrirá en multivaluación. Si se prefiere, puede también razonarse que el hipotético punto de multivaluación de desplazamientos estaría fuera del sólido, lo que es aceptable físicamente. En resumen, si el sólido tiene contornos $\theta=\text{cte}$, todos los términos de ϕ propuestos en (6.59) son en principio posibles. En el caso contrario, hay que descartar los términos de ϕ que tienen asociados desplazamientos lineales en θ . Por supuesto, en un caso como $\phi = r\theta \sin\theta$, es preciso no utilizar ninguno de los términos de tensión y desplazamiento que derivan de este término de ϕ , ya que en general hay que incluir todos los términos que deriven de un término de ϕ dado (porqué?).

-Un ejemplo de aplicación-

La función de Airy (6.59) ha sido obtenida con la intención de poder resolver cualquier problema de contorno sobre la geometría de la figura 6.23, mediante una solución en serie. Aparte de esto, hallaremos la solución de muchos problemas de interés seleccionando unas pocas componentes de la función de Airy (6.59). Por ejemplo, los problemas planos axisimétricos (ver páginas 6.52 y siguientes), quedan recogidos en las cuatro funciones ϕ correspondientes a $k=0$.

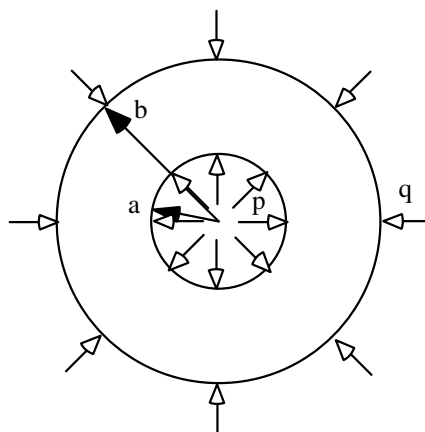


Figura 6.24.- Tubería sometida a presión interior y exterior

Consideremos Como ejemplo el problema de una tubería sometida a presión interior y exterior como indica la figura 6.24. Las tensiones de contorno son independientes de θ , por lo que elegiremos términos de ϕ tipo $k=0$ de la tabla. Como el sólido tiene continuidad al variar θ , descartamos $r^2 \ln r$, que conduciría a desplazamientos multivaluados. Como $\sigma_{r\theta}$ es cero en $r=a$, $r=b$, descartamos también θ de la función ϕ .

Nos quedamos por tanto con la siguiente propuesta para ϕ , de la que derivan las tensiones que también se indican:

$$\phi = Ar^2 + B \ln r$$

$$\sigma_{rr} = 2A + B/r^2 ; \quad \sigma_{r\theta} = 0 ; \quad \sigma_{\theta\theta} = 2A - B/r^2$$

Las constantes indeterminadas A y B se calculan mediante las condiciones de contorno, que en este caso son $\sigma_{rr} = -p$ en $r=a$, $\sigma_{rr} = -q$ en $r=b$:

$$\begin{aligned} 2A + B/a^2 &= -p \\ 2A + B/b^2 &= -q \end{aligned} \Rightarrow A = \frac{pa^2 - qb^2}{2(b^2 - a^2)} ; \quad B = (p - q) \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2}$$

Los desplazamientos se obtienen como suma de los asociados a cada componente de ϕ incluida en la solución, mas un eventual movimiento arbitrario como sólido rígido, que obviamos incluir:

$$2Gu_r = A \frac{2-2\nu}{1+\nu} r - B \frac{1}{r} ; \quad u_\theta = 0$$

La solución del problema tiene las características básicas que cabía anticipar a la vista de sus simetrías: los desplazamientos debían depender solamente de r (salvo un movimiento de sólido rígido), ya que si giramos la figura 6.24 en torno al su centro un ángulo cualquiera, se obtiene exactamente el mismo problema. Las tensiones y deformaciones habían de ser como consecuencia también independientes de θ , tal como se ha obtenido. Este problema es típicamente axisimétrico. Puede comprobarse que se obtienen los mismos desplazamientos y tensiones a partir de la solución axisimétrica (6.46), (6.48).

Siguiendo los pasos básicos utilizados en este ejemplo, es decir, seleccionando componentes de la Función de Airy que convengan para satisfacer las condiciones de contorno, se puede dar solución a muchos problemas interesantes, no necesariamente axisimétricos, y no necesariamente con geometría tipo anillo (por ejemplo pueden resolverse algunos problemas con bordes $\theta = \text{cte}$).

Bibliografía:

- BARBER, J.R., "Elasticity", Kluwer Academic Publishers
TIMOSHENKO, S. y GOODIER, J.N., "Teoría de la Elasticidad", Urmo
ORTIZ, L., "Elasticidad", ETSII-Univ. Politécnica de Madrid.
GREEN, A.E., y ZERNA, W., "Theoretical Elasticity", Dover Publications
FUNG, Y.C., "Foundations of solid mechanics", Prentice-Hall
PARIS, F., "Teoría de la Elasticidad", ETSII-Univ. Sevilla