

## Ecuaciones y Teoremas de la Elasticidad.

---

A partir de las ecuaciones básicas de la Teoría de la Elasticidad, presentadas en los tres capítulos anteriores, se derivan un conjunto de ecuaciones y teoremas de gran utilidad a la hora de abordar la resolución de un problema dado, o que son el fundamento de ciertas estrategias o métodos generales de resolución. En este capítulo se presentan algunas de estas ecuaciones y teoremas.

### 5.1.- Ecuaciones de Navier.

Estas ecuaciones fueron desarrolladas por Louis Navier en la década de 1820. La idea fundamental que se persigue es evitar la complicación asociada al manejo de magnitudes de varios tipos (deformaciones, tensiones, desplazamientos), formulando un conjunto de ecuaciones que contengan solamente a los desplazamientos, y cuya solución sea la solución del problema elástico. La elección de los desplazamientos como variables básicas del problema obedece a que conocidos éstos, la obtención de los campos de deformaciones y tensiones requiere simples derivaciones y operaciones algebraicas ordinarias. Para conseguir tales ecuaciones, partimos de las ecuaciones de equilibrio (2.13), las de compatibilidad deformación-desplazamiento (3.11), y de la ley de comportamiento lineal isótropa (4.40), que reproducimos por comodidad:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad ; \quad \varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \quad ; \quad \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}$$

Es posible poner en la tercera ecuación las deformaciones en función de los desplazamientos (usando la segunda ecuación). Obtenemos así la tensión en función de los desplazamientos. Después llevamos la tensión a la primera ecuación, realizando la derivación que ésta indica. Seguidamente se detalla este sencillo proceso:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + G(u_{i,j} + u_{j,i}) &\Rightarrow \sigma_{ij,j} = \lambda u_{k,kj} \delta_{ij} + G(u_{i,jj} + u_{j,ij}) = (\lambda + G)u_{j,ji} + Gu_{i,jj} \Rightarrow \\ &(\lambda + G)u_{j,ji} + Gu_{i,jj} + X_i = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Conocemos como Ecuaciones de Navier a las tres ecuaciones anteriores ( $i=1,2,3$ ). El procedimiento seguido por Navier para su obtención no fue el presentado aquí, dado que la mecánica de medios continuos no contaba en la época con la popularidad que tiene hoy día. Las mismas fueron obtenidas a partir de un modelo de sólido consistente en partículas conectadas entre sí. Inicialmente Navier propuso unas ecuaciones con una sola constante elástica para el material isótropo (eran, por lo tanto, incorrectas). Fue un

amplio periodo de discusión de los investigadores más relevantes del momento el que condujo a la forma (5.1) de estas ecuaciones. Las mismas admiten ser expresadas en función de operadores usuales en teoría vectorial de campos, lo que resulta cómodo si se han de expresar en otros sistemas de coordenadas no cartesianos:

$$(\lambda+G) \mathbf{grad} \operatorname{div} (\mathbf{u}) + G \nabla^2(\mathbf{u}) + \mathbf{X} = 0$$

Es inmediato apreciar que si un campo de desplazamientos satisface las ecuaciones de Navier y todas las condiciones de contorno de un problema, entonces ese campo de desplazamientos es solución de nuestro problema elástico. En efecto, las tensiones que derivan de ese campo de desplazamientos cumplirá las ecuaciones de equilibrio interno (dado que las ecuaciones de Navier son en realidad estas ecuaciones de equilibrio expresadas en función de los desplazamientos), y las demás ecuaciones del modelo matemático se satisfacen por propia definición: el campo de deformaciones es aquel que deriva de los desplazamientos mediante (3.11), y las tensiones son las que se obtienen mediante (4.40) con las mismas constantes elásticas empleadas en (5.1).

#### Nociones sobre la búsqueda de solución para las ecuaciones de Navier

Cuando se pretende integrar las ecuaciones de Navier, un paso previo es expresar las condiciones de contorno en tensiones en función de los desplazamientos, para poder imponerlas en estas variables. Su expresión es:

$$\bar{X}_i = \sigma_{ij} n_j = (\lambda \epsilon \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij}) n_j = [\lambda u_{k,k} \delta_{ij} + G(u_{i,j} + u_{j,i})] n_j$$

En principio, es posible integrar (analíticamente o mediante métodos aproximados) las ecuaciones de Navier en un problema dado, y ajustar las constantes de integración mediante las condiciones de contorno en tensiones anteriores, y las condiciones de contorno en desplazamientos. Estas últimas se imponen de manera más sencilla, ya que los desplazamientos son precisamente las variables en las que están planteadas las ecuaciones. Seguidamente presentamos algunas breves nociones acerca de la obtención de soluciones por métodos analíticos.

Si las fuerzas de volumen son constantes,  $X_i = \text{cte}$ , la ecuación de Navier permite observar algunas particularidades de la solución. Derivando cada ecuación (5.1) respecto de la coordenada  $x_i$  respectiva y sumándolas, se tiene:

$$(\lambda + G) u_{j, jii} + G u_{i, jji} + X_{i,i} = 0 \Rightarrow [(\lambda + G) + G] u_{j, jii} = 0 \Rightarrow \nabla^2 u_{j,j} = \nabla^2 e = 0$$

Es decir, que si las fuerzas de volumen son constantes, la dilatación "e" es una función armónica. Teniendo en cuenta este resultado, si aplicamos  $\nabla^2$  a cada ecuación (5.1) por separado obtenemos inmediatamente que  $\nabla^2(\nabla^2 u_i) = \nabla^4 u_i = 0$ , propiedad que enunciaremos como: "si las fuerzas de volumen son constantes, cada componente de desplazamiento es una función biarmónica". De esta propiedad se deduce obviamente que cada componente de deformación y cada componente de tensión será también biarmónica en el caso de fuerzas de volumen constantes. Esta propiedad ofrece para

estos casos una orientación acerca de qué tipo de soluciones plantear o ensayar para las ecuaciones de Navier.

En la búsqueda de soluciones analíticas de la ecuación de Navier se utilizan técnicas matemáticas complementarias, tales como el planteamiento de funciones potenciales de desplazamiento. Estas técnicas están basadas en la propiedad de que cualquier campo vectorial analítico ( $\mathbf{u}$  en nuestro caso) puede expresarse como el gradiente de un cierto campo escalar  $\phi$  más el rotacional de un cierto campo vectorial  $\Psi$  (teorema de Helmholtz):

$$\mathbf{u} = \mathbf{grad} \phi + \mathbf{rot} \Psi, \quad \text{o bien} \quad u_i = \phi_{,i} + e_{ijk} \Psi_{k,j}$$

Puede demostrarse que existen las funciones  $\phi$  y  $\Psi$  anteriores asociadas al campo analítico  $\mathbf{u}$  bajo la condición adicional  $\text{div} \Psi = 0$ . Llamamos entonces a  $\phi$  y  $\Psi$  respectivamente potencial escalar y potencial vector.

La dilatación se expresa en función de los potenciales como:  $e = u_{i,i} = \phi_{,ii} + e_{ijk} \Psi_{k,ji}$ . El último término es nulo ya que expresa la divergencia de un rotacional. Por tanto se tiene  $e = \nabla^2 \phi$ . En el caso de fuerzas de volumen nulas,  $X_i = 0$ , al que nos referiremos en lo sucesivo, las ecuaciones de Navier quedan:

$$(\lambda + G)(\nabla^2 \phi)_{,i} + G(\nabla^2 \phi)_{,i} + G e_{ijk} (\nabla^2 \Psi_k)_{,j} = 0$$

La ecuación anterior se satisface si  $\nabla^2 \phi = e = \text{cte}$ ,  $\nabla^2 \Psi_i = \text{cte}$  (aunque no se trate de una solución general). Cuando se espere de antemano que la dilatación sea constante en el sólido, es natural intentar encontrar la solución bajo estas condiciones.

Analicemos el caso aún más particular en el que el campo de desplazamientos derive únicamente del potencial escalar:

$$2Gu_i = \phi_{,i}$$

Al potencial escalar  $\phi$  así definido se le llama potencial de Lamé. La constante  $2G$  se incluye por razones históricas. La dilatación asociada a este campo se obtiene por derivación:

$$2Gu_{i,i} = 2Ge = \phi_{,ii} \\ (= \text{cte, para satisfacer (5.1)})$$

Las deformaciones y tensiones dadas por este potencial son, respectivamente:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \phi_{,ij} \quad \sigma_{ij} = \frac{\lambda}{2G} \phi_{,kk} \delta_{ij} + \phi_{,ij}$$

Si la dilatación es nula,  $e = 0 \Rightarrow \nabla^2 \phi = 0$  (caso de material incompresible), entonces los campos de deformaciones y tensiones asociados al potencial de Lamé son:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \phi_{,ij} \quad \sigma_{ij} = \phi_{,ij}$$

El potencial de Lamé da solución, entre otros, a problemas del tipo esfera maciza o hueca con presión exterior (e interior en su caso), y también bajo otras condiciones de contorno sencillas. El procedimiento suele basarse en plantear la función potencial  $\phi$  como suma de varias funciones, una del tipo  $\nabla^2 = \text{cte}$  (típicamente  $Cr^2$ ), que produce la aportación constante no nula a la dilatación, más otras del tipo armónico  $\nabla^2 = 0$ , de las que se conoce una amplia variedad. Por ejemplo, las siguientes son funciones armónicas:

2D:	$Ax^2 + 2Bxy - Ay^2$	$x, y$ , coordenadas cartesianas
	$Ar^n \cos(n\theta)$	$r^2 = x^2 + y^2$ ; $\theta = \text{atg}(y/x)$
3D:	$A \ln(Br)$	$A, B$ , constantes arbitrarias
	$A\theta$	$n$ , número entero
	$A/R$	$(R^2 = x^2 + y^2 + z^2)$
	$A \ln(R + z)$	$(x, y, z$ coordenadas cartesianas)
	$A \ln \left[ \frac{(r^2 + (z - B)^2 + z - B)(r^2 + (z + B)^2 - z - B)}{r^2} \right]$	

Pueden plantearse también otras funciones polinómicas armónicas, del tipo a la primera de las anteriores, lo que da solución a algunos problemas en coordenadas cartesianas. El resto de las funciones bidimensionales anteriores resuelven algunos problemas relativos a sólidos circulares. La primera de las tridimensionales resuelve específicamente problemas de esferas con solicitaciones simétricas respecto de todos los planos que pasan por su centro. Las dos últimas resuelven algunos problemas de sólidos con geometría de revolución entorno al eje  $z$ .

Pese a lo atractivo de su sencillez, resulta claro que el potencial de Lamé no es lo bastante general para representar cualquier campo dado de desplazamientos  $u_i$ , ya que en general éste no podrá ser expresado en función del potencial escalar solamente. Existen otros enfoques más generales de solución basados en potenciales. Entre ellos merece especial mención la técnica del "Vector de Galerkin", que consiste en expresar el potencial vector  $\Psi$  como rotacional de otro campo vectorial. Esta técnica ha permitido encontrar la solución de muchos problemas clásicos de la elasticidad, notablemente los relacionados con cargas concentradas en el sólido infinito o semi-infinito (un semiespacio limitado por un plano). Los detalles de esta y otras técnicas de particular interés para problemas tridimensionales no serán presentados aquí, remitiéndose al lector interesado a bibliografía más especializada (por ejemplo el texto de J.R. Barber, capítulos 15 y 16).

## 5.2.- Ecuaciones de Beltrami y Michell.

En ocasiones es posible obtener la solución de tensiones del problema sin llegar a obtener los desplazamientos. Cuando se da esta posibilidad suele ser ventajoso hacer uso de ella, ya que la obtención de las tensiones implica un orden menos de integración

que la obtención de los desplazamientos. Es especialmente razonable pensar en un enfoque en tensiones cuando todas las tensiones del contorno sean conocidas, aunque puede aplicarse en otras situaciones. Puesto que en principio no tenemos intención de calcular el campo de desplazamientos, hemos de asegurarnos de que el campo de tensiones tenga asociado un campo de desplazamientos físicamente posible. Para ello imponemos el cumplimiento de las ecuaciones de integrabilidad (3.32):

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{il,kj} - \varepsilon_{kj,il} = 0$$

Que expresamos en función de las tensiones a través de la ley de comportamiento en su forma (4.52):

$$\sigma_{ij,kl} + \sigma_{kl,ij} - \sigma_{il,kj} - \sigma_{kj,il} = \frac{\nu}{1+\nu} [\sigma_{pp,kl} \delta_{ij} + \sigma_{pp,ij} \delta_{kl} - \sigma_{pp,kj} \delta_{il} - \sigma_{pp,il} \delta_{kj}]$$

Recordemos que solo hay 6 ecuaciones independientes de integrabilidad, por tanto solo 6 de las 81 aparentes ecuaciones anteriores serán independientes. Realizamos una combinación lineal con estas 81 ecuaciones, consistente en hacer iguales los subíndices "i" y "l", con el sumatorio que ello conlleva. De esta manera obtenemos un conjunto de 9 ecuaciones (subíndices libres j y k). Más tarde comprobaremos que 6 de estas 9 ecuaciones son independientes, lo que indica que no se pierde información al realizar esta combinación lineal:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,ki} + \sigma_{ki,ij} - \sigma_{ii,kj} - \sigma_{kj,ii} &= \frac{\nu}{1+\nu} [\sigma_{pp,ki} \delta_{ij} + \sigma_{pp,ij} \delta_{ki} - \sigma_{pp,kj} \delta_{ii} - \sigma_{pp,ii} \delta_{kj}] = \\ &= \frac{\nu}{1+\nu} [\sigma_{pp,kj} + \sigma_{pp,kj} - 3\sigma_{pp,kj} - \sigma_{pp,ii} \delta_{kj}] \end{aligned}$$

Utilizamos la ecuación de equilibrio en el dominio para transformar los dos primeros términos de la ecuación anterior:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{ij,ki} = -X_{j,k} \quad ; \quad \sigma_{ki,ij} = -X_{k,j}$$

Por tanto:

$$-(X_{j,k} + X_{k,j}) = \frac{1}{1+\nu} \sigma_{pp,kj} + \sigma_{kj,ii} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{pp,ii} \delta_{kj}$$

Hay que notar que esta transformación de algunos términos utilizando las ecuaciones de equilibrio no supone que la eventual aplicación de la ecuación anterior lleve implícita la imposición de las propias ecuaciones de equilibrio. Lo que sí es cierto es que la anterior es una forma válida de las ecuaciones de integrabilidad *solo cuando* se cumplen las ecuaciones de equilibrio. Pero si deseamos imponer las propias ecuaciones de equilibrio (lo que en general necesitaremos), tendremos que hacerlo separadamente. Como operación final, podemos calcular el valor de  $\sigma_{pp,ii}$  (último término de la ecuación anterior) haciendo  $k=j$  en la propia ecuación anterior:

$$-2X_{k,k} = \frac{1}{1+\nu} \sigma_{pp,kk} + \sigma_{kk,ii} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{pp,ii} \quad 3 = \frac{2-2\nu}{1+\nu} \sigma_{pp,kk} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{pp,kk} = -\frac{1+\nu}{1-\nu} X_{i,i}$$

Con lo que tenemos:

$$\sigma_{kj,ii} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{ii,kj} = -(X_{j,k} + X_{k,j}) - \frac{\nu}{1-\nu} X_{i,i} \delta_{kj} \quad (5.2)$$

Las anteriores son las ecuaciones de integrabilidad expresadas en función de las tensiones cuando se cumplen las ecuaciones de equilibrio. Se conocen como ecuaciones de Michell y Beltrami. Cabe insistir en el hecho de que un campo de desplazamientos que ensayemos como solución de un problema, puede satisfacer estas ecuaciones sin satisfacer las de equilibrio. En forma desarrollada, las seis ecuaciones independientes contenidas en la expresión (5.2) son:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{11} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})_{,11} &= -2X_{1,1} - \frac{\nu}{1-\nu} (X_{1,1} + X_{2,2} + X_{3,3}) \\ \nabla^2 \sigma_{22} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})_{,22} &= -2X_{2,2} - \frac{\nu}{1-\nu} (X_{1,1} + X_{2,2} + X_{3,3}) \\ \nabla^2 \sigma_{33} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})_{,33} &= -2X_{3,3} - \frac{\nu}{1-\nu} (X_{1,1} + X_{2,2} + X_{3,3}) \\ \nabla^2 \sigma_{12} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})_{,12} &= -(X_{1,2} + X_{2,1}) \\ \nabla^2 \sigma_{13} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})_{,13} &= -(X_{1,3} + X_{3,1}) \\ \nabla^2 \sigma_{23} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})_{,23} &= -(X_{2,3} + X_{3,2}) \end{aligned}$$

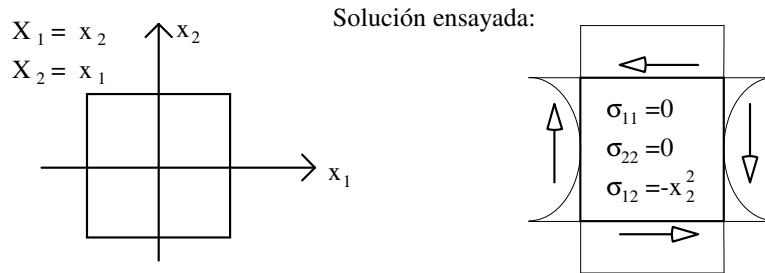
En el caso en que las fuerzas de volumen sean constantes,  $X_i = \text{cte}$ , los miembros derechos se anulan, resultando:

$$\sigma_{kj,ii} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{ii,kj} = 0 \quad (5.3)$$

Si a partir de las ecuaciones de Beltrami-Michell y de las ecuaciones de equilibrio se consigue calcular el campo de tensiones, puede procederse al cálculo de desplazamientos aplicando lo expuesto en el epígrafe 3.6 acerca de la obtención del campo de desplazamientos a partir del de deformaciones.

#### Contraejemplo a la suficiencia de las ecuaciones de Beltrami-Michell

Hemos insistido en el hecho de que un campo de desplazamientos que ensayemos como solución de un problema, puede satisfacer las ecuaciones de Beltrami-Michell sin satisfacer las de equilibrio. Ello puede sorprender en un principio, dado que las ecuaciones de equilibrio fueron utilizadas en su obtención.



**Figura 5.1.-** Problema y tensiones en el contorno de la solución ensayada.

Si las aclaraciones presentadas en su momento no infunden aún suficiente seguridad en el lector, puede considerarse el siguiente contraejemplo: Sea un sólido bidimensional cuadrado como indica la figura 5.1, sometido a las fuerzas de volumen  $X_1 = x_2$  ;  $X_2 = x_1$ . Asumiendo  $\sigma_{33} = 0$ , y que las derivadas respecto de  $x_3$  son nulas, las ecuaciones significativas en (5.2) son las siguientes:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{11} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,11} &= 0 & \frac{2+\nu}{1+\nu} \sigma_{11,11} + \sigma_{11,22} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{22,11} &= 0 \\ \nabla^2 \sigma_{22} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,22} &= 0 & \frac{2+\nu}{1+\nu} \sigma_{22,22} + \sigma_{22,11} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{11,22} &= 0 \\ \nabla^2 \sigma_{12} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,12} &= -2 & \sigma_{12,11} + \sigma_{12,22} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,12} &= -2 \end{aligned} \Rightarrow$$

Como campo de tensiones elegimos ensayar  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$ ;  $\sigma_{12} = -x_1^2$ , que cumple las ecuaciones anteriores. Pero es fácil comprobar que no satisfacen las de equilibrio:

$$\begin{aligned} -X_1 &= \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} \Rightarrow -x_2 = -2x_2 && \text{(Falso!)} \\ -X_2 &= \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} \Rightarrow -x_1 = 0 + 0 = 0 && \text{(Falso!)} \end{aligned}$$

Lo que muestra que efectivamente un campo de tensiones que propongamos puede satisfacer las ecuaciones de Beltrami-Michell sin ser la solución de nuestro problema, ya que puede no satisfacer las de equilibrio. Notemos de paso que la no satisfacción de las ecuaciones de equilibrio interno implica en general el no equilibrio del conjunto del sólido. Así, en este caso las fuerzas de volumen son un sistema autoequilibrado en la placa, por lo que las fuerzas de contorno también tendrían que serlo para que la misma estuviera en equilibrio. Puede comprobarse que lo anterior no se da en la solución de tensiones ensayada: las fuerzas de contorno tienen resultante nula pero su momento respecto de un punto no lo es (ver segunda figura 5.1).

**5.3.- Teorema de unicidad de solución del problema elástico lineal.**

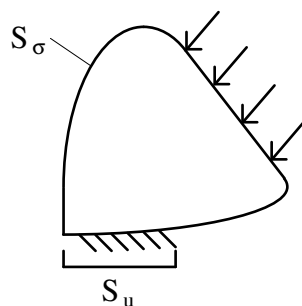
La experiencia física común indica que en general existe una relación causa - efecto unívoca en los fenómenos naturales. En particular esperamos que cada vez que apliquemos determinada acción sobre un sólido, éste adopte la misma configuración deformada. En principio, demos por válida esa apreciación de la realidad, al menos mientras no ocurran fenómenos especiales, como deformaciones no elásticas en el material, o inestabilidad. Admitida esta relación unívoca entre causa y efecto en el fenómeno físico, nos preguntamos si también existe el mismo tipo de relación en el

modelo matemático que hemos desarrollado. Es decir, deseamos saber si a un conjunto de solicitaciones particular de un sólido le corresponde una configuración deformada única en el modelo matemático. La cuestión planteada es, por tanto, la de unicidad de solución del problema elástico.

Antes de presentar el teorema que nos ocupa, conviene tener noticia de la importancia y el alcance de la cuestión planteada: En elasticidad es habitual emplear métodos de resolución de tipo inverso, que consisten básicamente en ensayar una solución y comprobar a posteriori que la misma cumple las ecuaciones del modelo matemático (ajustando en su caso algunos parámetros). Este tipo de procedimientos carecería de fundamento si no estuviera asegurado que la solución del problema es única.

La demostración de unicidad de solución del problema elástico bajo ciertas condiciones, que se consideran las condiciones que debe cumplir un problema para estar planteado correctamente, es debida a Kirchoff. Dicha demostración se presenta a continuación.

Sea un sólido cuyo contorno exterior es  $S$ . En una parte del contorno,  $S_u$ , están prescritos los desplazamientos y se desconocen las tensiones, y en otra parte del contorno,  $S_\sigma$ , están prescritas las tensiones y se desconocen los desplazamientos. En ningún punto del contorno se prescribe simultáneamente la tensión y el desplazamiento, por lo que las porciones  $S_u$  y  $S_\sigma$  no tienen intersección, y además  $S_u$  y  $S_\sigma$  cubren por completo la superficie  $S$  del sólido. Un ejemplo de estas condiciones se muestra en la figura 5.2. Nótese que la ausencia de actuación exterior sobre un punto del contorno supone en realidad prescribir tensión nula en ese punto, por lo que el mismo pertenecerá a  $S_\sigma$ . Se supone además que las restricciones al desplazamiento son por lo menos suficientes para evitar la indeterminación asociada a movimientos como sólido rígido.



$$\text{En } S_u \quad u_i = u_i^* \quad (\text{funciones dadas})$$

$$\text{En } S_\sigma \quad \bar{X}_i = \bar{X}_i^* \quad (\text{funciones dadas})$$

$$S_u + S_\sigma = S$$

**Figura 5.2.-** Ejemplo de condiciones para el teorema de unicidad de Kirchoff

El teorema establece que *bajo las condiciones anteriores, y si existe la función de densidad de energía de deformación, y ésta es definida positiva, entonces la solución de desplazamientos es única* (y por lo tanto también lo son los campos de deformaciones y de tensiones).

Existen argumentos termodinámicos que indican que la función de densidad de energía de deformación,  $W$ , debe ser definida positiva en condiciones más generales. Nosotros simplemente comprobaremos que efectivamente lo es para el caso lineal elástico isótropo de nuestro interés. De (4.59) tenemos:



$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\lambda e \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}) \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \lambda e^2 + G \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \geq 0$$

Que nunca es negativa por ser una suma de términos de deformación al cuadrado, y que sólo puede ser cero si todas las componentes de deformación son nulas (estas condiciones definen a una función como "definida positiva"). Realizada la comprobación anterior, vamos a demostrar el teorema. Supongamos que bajo unas mismas condiciones de contorno existen dos soluciones de desplazamiento, que llamaremos  $u'_i$  y  $u''_i$ . Cada una tendrá asociado un campo de deformaciones y de tensiones. Como suponemos que ambas son soluciones válidas, ambos campos de tensiones cumplirán las ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} u'_i &\xrightarrow{(u_{i,j}+u_{j,i})/2} \varepsilon'_{ij} \xrightarrow{\text{Hooke}} \sigma'_{ij} \quad (\sigma'_{ij,j} + X_i^* = 0) \\ u''_i &\xrightarrow{(u_{i,j}+u_{j,i})/2} \varepsilon''_{ij} \xrightarrow{\text{Hooke}} \sigma''_{ij} \quad (\sigma''_{ij,j} + X_i^* = 0) \end{aligned}$$

Siendo  $X_i^*$  la fuerza de volumen, dato del problema. Consideremos un nuevo campo de desplazamientos  $u_i$ , obtenido como diferencia de los dos anteriores. Como todas las relaciones son lineales, las deformaciones y tensiones asociadas a este nuevo campo también se obtienen por diferencia:

$$u_i = u'_i - u''_i \quad ; \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} - \varepsilon''_{ij} \quad ; \quad \sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \sigma''_{ij}$$

Derivando la última igualdad tenemos:

$$\sigma_{ij,j} = \sigma'_{ij,j} - \sigma''_{ij,j} = -X_i^* + X_i^* = 0$$

Multiplicando  $\sigma_{ij,j}$  por  $u_i$  e integrando en el volumen se tiene:

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{ij,j} u_i dV = 0 &= \int_V (\sigma_{ij} u_i)_{,j} dV - \int_V \sigma_{ij} u_{i,j} dV = \int_S \sigma_{ij} u_i n_j dS - \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \\ &= \int_S \bar{X}_i u_i dS - \int_V 2W dV \quad \Rightarrow \quad \int_S \bar{X}_i u_i dS = \int_V 2W dV \end{aligned}$$

En donde  $\bar{X}_i$  es el vector tensión en el contorno asociado a la solución diferencia. La integral de contorno se anula porque en una parte de ese contorno ( $S_u$ ) se anula  $u_i$  (nótese que esto sucede aunque los desplazamientos prescritos  $u_i^*$  no sean nulos, ya que se trata del campo de desplazamientos diferencia), y en el resto del contorno ( $S_\sigma$ ) se anula la tensión en el contorno (ya que en las zonas de tensión prescrita es  $\bar{X}_i = \bar{X}_i^* - \bar{X}_i^* = 0$ ). Por lo tanto:

$$\int_S \bar{X}_i u_i dS = \int_V 2W dV = 0 \tag{5.4}$$

Como  $W$  es una función definida positiva, lo anterior implica que la deformación  $\varepsilon_{ij}$  asociada al campo  $u_i$  debe ser nula en todos los puntos del sólido. Sabemos que el único campo de movimientos posible con estas características corresponde a un movimiento

como sólido rígido. Pero tal movimiento no es posible, dado que en  $S_u$  el campo  $u_i$  tiene desplazamientos prescritos nulos (y según nuestras premisas, en cantidad suficiente para impedir movimientos arbitrarios como sólido rígido). Por tanto es  $u_i = 0$ , como única posibilidad de movimiento con deformación nula y además movimiento nulo de un número suficiente de puntos del contorno. De esta conclusión se sigue inmediatamente que las dos soluciones distintas supuestas inicialmente, deben en realidad coincidir:

$$u_i = u'_i - u''_i = 0 \Rightarrow u'_i = u''_i$$

El hecho de que si existiesen dos soluciones distintas las mismas coincidirían, es equivalente a enunciar que, tal como ha sido planteado, la solución del problema elástico es única, como queríamos demostrar. Evidentemente, la igualdad del campo de desplazamientos implica la de los campos de deformaciones y de tensiones.

#### Ampliación de las condiciones para el teorema de unicidad.

Desde el punto de vista de su aplicación, el aspecto más interesante a recordar del teorema de unicidad es sin duda el conjunto de premisas del teorema, que como se ha demostrado son condiciones suficientes para que el problema elástico tenga solución única. Mostraremos que dichas premisas no son todas estrictamente necesarias: la premisa de que en cada punto del contorno esté prescrito el vector tensión o bien el vector desplazamiento puede ampliarse ligeramente, para recoger algunos tipos usuales de condiciones de contorno.

En efecto, observamos que esta premisa ha servido únicamente para asegurar que la integral de contorno de (5.4) se anule. Pero esta integral se anula igualmente si en puntos del contorno está prescrita la tensión según una dirección y el desplazamiento según la dirección perpendicular (nótese que el integrando tiene la forma de un producto escalar). Esto permite incluir entre las condiciones de contorno aceptables las asociadas a "apoyos móviles", que permiten el movimiento solamente según una dirección (usualmente tangente al contorno  $S$ ). En el epígrafe 5.9 de este capítulo se detallarán esta y otras condiciones de apoyo.

#### **5.4.- Planteamiento integral de las ecuaciones de equilibrio: Principio de los Desplazamientos Virtuales (PDV).**

En este epígrafe y en los tres siguientes estudiaremos un conjunto de principios y teoremas formulados de forma integral, en oposición al enfoque directo sobre las ecuaciones diferenciales aportado por las ecuaciones de Navier y las de Beltrami-Michell. Estas formulaciones integrales pueden considerarse la base de los potentes métodos de resolución que han progresado enormemente con la creciente capacidad de cálculo de los ordenadores. Por ejemplo, el PDV que estudiamos en este epígrafe está en la base del popular Método de los Elementos Finitos, así como del cálculo matricial de estructuras.

Sea  $\sigma_{ij}$  un campo de tensiones cualquiera en un sólido, que llamaremos "campo real" de tensiones. Sea  $\varphi_i$  un campo cualquiera de desplazamientos, univaluado y tres veces derivable, cuyas deformaciones asociadas son  $\varepsilon_{ij}^\varphi$ , y que llamaremos "campo virtual" de desplazamientos. Nótese que no se requiere que el campo virtual guarde ninguna relación con el campo real. Bajo estas condiciones, el enunciado del PDV es el siguiente:

El cumplimiento para *cualquier campo virtual*  $\varphi_i$  de la ecuación integral siguiente:

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^\varphi dV = \int_V X_i \varphi_i dV + \int_S \bar{X}_i \varphi_i dS \quad (5.5)$$

Es condición necesaria y suficiente para que el campo real de tensiones satisfaga la ecuación de equilibrio en el dominio con  $X_i$  ( $\sigma_{ij,j} + X_i = 0$  en  $V$ ), y la ecuación de equilibrio en el contorno con  $\bar{X}_i$  ( $\bar{X}_i = \sigma_{ij} n_j$  en  $S$ ).

Como es habitual,  $V$  es el dominio ocupado por el sólido, y  $S$  su contorno. Demostraremos en primer lugar que la ecuación integral es una *condición necesaria* para que el conjunto de magnitudes "reales" esté en equilibrio. Es decir, partimos de que se satisface el equilibrio y llegaremos a que debe cumplirse la ecuación (5.5). Tomamos la ecuación de equilibrio en el dominio,  $\sigma_{ij,j} + X_i = 0$ , la multiplicamos por  $\varphi_i$  e integramos en el sólido:

$$\int_V \sigma_{ij,j} \varphi_i dV + \int_V X_i \varphi_i dV = 0 \Rightarrow \int_V (\sigma_{ij} \varphi_i)_{,j} dV - \int_V \sigma_{ij} \varphi_{i,j} dV + \int_V X_i \varphi_i dV = 0$$

Hemos integrado por partes la integral de volumen. Mediante el teorema de la divergencia transformamos la primera integral de la última igualdad en una integral de contorno. El integrando de la segunda integral puede transformarse teniendo en cuenta que  $\varphi_{i,j} = \varepsilon_{ij}^\varphi + \omega_{ij}^\varphi$  (tensores deformación y rotación asociados al campo virtual), y por tanto  $\sigma_{ij} \varphi_{i,j} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^\varphi$ , puesto que el producto  $\sigma_{ij} \omega_{ij}^\varphi$  es siempre nulo (tensor simétrico por tensor antisimétrico). Con esto tenemos:

$$\int_S \sigma_{ij} \varphi_i n_j dV - \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^\varphi dV + \int_V X_i \varphi_i dV = 0$$

Podemos utilizar la relación  $\sigma_{ij} n_j = \bar{X}_i$  en la primera de las integrales anteriores, dado que en este sentido de la demostración se asume el equilibrio del campo real. Haciendo esto y reordenando términos obtenemos la ecuación integral (5.5), como queríamos demostrar.

Demostraremos ahora que el cumplimiento de la ecuación integral (5.5) en las condiciones establecidas en el enunciado, es también condición suficiente para que el campo de tensiones "real" cumpla las ecuaciones de equilibrio. Es decir, ahora tomamos como punto de partida el que la ecuación integral se satisface, y deseamos obtener a partir de ella las ecuaciones de equilibrio. Comenzaremos manipulando la primera integral de (5.5):

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{\phi} dV = \int_V \sigma_{ij} \phi_{i,j} dV = \int_V (\sigma_{ij} \phi_i)_{,j} dV - \int_V \sigma_{ij,j} \phi_i dV = \int_S \sigma_{ij} \phi_i n_j dV - \int_V \sigma_{ij,j} \phi_i dV =$$

$$= (\text{por (5.5)}) = \int_V X_i \phi_i dV + \int_S \bar{X}_i \phi_i dS$$

Agrupando términos tenemos: 
$$\int_V (X_i + \sigma_{ij,j}) \phi_i dV + \int_S (\bar{X}_i - \sigma_{ij} n_j) \phi_i dS = 0$$

El que la igualdad anterior se satisficiera para un sólo campo particular de desplazamientos virtuales  $\phi_i$ , no permitiría asegurar nada acerca de sus cofactores en los integrandos. Pero si tal como establece el enunciado, el campo virtual puede ser *cualquiera* que podamos imaginar, entonces los factores que multiplican a  $\phi_i$  en las integrales deben ser nulos para que se cumpla en todo caso la igualdad a cero (esto se admite por principio). Los factores de  $\phi_i$  en los integrandos igualados a cero son precisamente las ecuaciones de equilibrio, como queríamos demostrar:

$$X_i + \sigma_{ij,j} = 0 \quad ; \quad \bar{X}_i - \sigma_{ij} n_j = 0$$

Cabe hacer algunas observaciones acerca del Principio de los desplazamientos Virtuales. La primera es que el cumplimiento de la ecuación integral (5.5) no garantiza absolutamente nada acerca del campo de desplazamientos "real"  $u_i$  (asociado a  $\sigma_{ij}$ ), que como se aprecia, ni siquiera aparece. Los métodos de resolución basados en el PDV deben en algún momento asegurar la continuidad, univaluación, etc, del campo de desplazamientos ("real"). Por ejemplo, los métodos matriciales de cálculo de estructuras imponen la igualdad de desplazamientos y giros (cuando proceda) en las uniones de las barras, y el método de los elementos finitos obvia el problema utilizando los desplazamientos como variables básicas, y realizando una aproximación de los mismos que tiene desde el principio las propiedades requeridas. Este método será presentado en un capítulo posterior. La segunda observación es que el PDV es válido sea cual sea la ley de comportamiento, ya que no se usó ninguna en su formulación. Lo anterior incluye tanto leyes no lineales como comportamiento plástico. No abordaremos la consideración del tiempo como variable y de los efectos de inercia en el contexto de los teoremas integrales. Una tercera observación está relacionada con el hecho de que los términos de la ecuación integral (5.5) tienen dimensiones de trabajo. De hecho, cada término representa el trabajo que realizaría la fuerza o tensión correspondiente, permaneciendo constante, si se produjera el desplazamiento virtual. Se suele denominar al miembro izquierdo "trabajo virtual interno", y al miembro derecho "trabajo virtual exterior", lo que asigna a la ecuación integral el significado de "trabajo interno igual a trabajo exterior". La cuarta y última observación es que el uso práctico del PDV se centra sobre todo en el uso de la ecuación (5.5) como "una ecuación que debe cumplirse" (es decir, como condición necesaria), y que es posible plantear tantas veces como necesitemos, con distintos estados virtuales, para obtener tantas ecuaciones como queramos involucrando a los parámetros de nuestro problema.

### 5.5.- Planteamiento integral de las ecuaciones de compatibilidad: Principio de las Fuerzas virtuales (PFV).

Se trata de un enunciado dual del anterior. Es también la base de una familia de métodos de resolución de problemas elásticos, llamados "métodos de compatibilidad". Estos métodos tienen en general la desventaja de ser poco apropiados para ser sistematizados e implementados en ordenador. Cuando se deben efectuar cálculos manualmente, es en ocasiones ventajoso utilizar métodos de esta familia en lugar de métodos de equilibrio.

Sea  $\epsilon_{ij}$  un campo de deformaciones cualquiera en un sólido, que llamaremos "campo real" de deformaciones. Sea  $\sigma_{ij}^\phi$  un campo cualquiera de tensiones, que llamaremos "campo virtual" de tensiones, y que está en equilibrio con las fuerzas "virtuales" de volumen y de contorno. Es decir:

$$\sigma_{ij,j}^\phi + X_i^\phi = 0, \quad \bar{X}_i^\phi = \sigma_{ij}^\phi n_j$$

Nótese que no se requiere que el campo virtual guarde ninguna relación particular con el campo real. Bajo estas condiciones, el enunciado del PFV es el siguiente:

El cumplimiento para *cualquier campo virtual*  $\sigma_{ij}^\phi$  de la ecuación integral siguiente:

$$\int_V \sigma_{ij}^\phi \epsilon_{ij} dV = \int_V X_i^\phi u_i dV + \int_S \bar{X}_i^\phi u_i^c dS \tag{5.6}$$

Es condición necesaria y suficiente para que el campo real de deformaciones  $\epsilon_{ij}$  satisfaga la ecuación de compatibilidad con  $u_i$  ( $\epsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i}) / 2$  en  $V$ ), y que los desplazamientos en el contorno tengan el valor  $u_i^c$  ( $u_i = u_i^c$  en  $S$ ).

Por analogía con las ecuaciones de equilibrio, llamaremos ecuación de compatibilidad en el dominio y ecuación de compatibilidad en el contorno a cada una de las dos últimas relaciones entre paréntesis del enunciado, respectivamente. En general, un sólido tendrá prescritos los desplazamientos en una parte del contorno  $S$  y en otra no, pero ello no es de interés ahora:  $u_i^c$  son los desplazamientos del campo real en *todo* el contorno  $S$  (si el enunciado del PFV es cierto; como demostraremos, lo es), de la misma manera que en el PDV era  $\bar{X}_i$  la tensión en el contorno, estuviere ésta prescrita o no en un punto particular del mismo.

Demostraremos en primer lugar que el cumplimiento de la ecuación integral es una condición necesaria para que se satisfagan las ecuaciones de compatibilidad. Partimos por tanto de que las mismas se satisfacen, y llegaremos a obtener la ecuación (5.6). Multiplicando la ecuación de compatibilidad en el dominio por el campo virtual de tensiones e integrando en el sólido, tenemos:

$$\int_V \epsilon_{ij} \sigma_{ij}^\phi dV = \int_V \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \sigma_{ij}^\phi dV = \int_V u_{i,j} \sigma_{ij}^\phi dV = \int_V (u_i \sigma_{ij}^\phi)_{,j} dV - \int_V u_i \sigma_{ij,j}^\phi dV$$

En donde se ha hecho uso de que el tensor de tensiones es simétrico junto con que es indiferente el símbolo utilizado para un subíndice mudo (segunda igualdad), y se ha realizado una integración por partes (tercera igualdad). La primera integral del último

miembro puede pasarse al contorno mediante el teorema de la divergencia, y una vez hecho esto puede hacerse la sustitución de  $u_i$  por  $u_i^c$ , ya que en este sentido de la demostración se asume que  $u_i = u_i^c$  en  $S$ . Finalmente podemos utilizar las ecuaciones de equilibrio del campo virtual en el dominio y el contorno, que se satisfacen en todo caso, para que aparezcan las cargas virtuales en lugar de las tensiones:

$$\int_V \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}^{\phi} dV = \int_S u_i^c \sigma_{ij}^{\phi} n_j dS - \int_V u_i \sigma_{ij,j}^{\phi} dV = \int_S u_i^c \sigma_{ij}^{\phi} n_j dS - \int_V u_i \sigma_{ij,j}^{\phi} dV = \int_S u_i^c \bar{X}_i^{\phi} dS + \int_V u_i X_i^{\phi} dV$$

El primer y último miembros de la igualdad anterior reproducen la ecuación (5.6), como queríamos demostrar.

Ahora demostraremos que el cumplimiento de la ecuación integral (5.6) es también una condición suficiente para que el campo "real" de deformaciones y desplazamientos cumpla las ecuaciones de compatibilidad en el dominio y en el contorno. Partimos pues de la ecuación integral, y queremos obtener a partir de ella las ecuaciones de compatibilidad. Comenzamos manipulando la integral de volumen del segundo miembro de (5.6):

$$\int_V X_i^{\phi} u_i dV = - \int_V \sigma_{ij,j}^{\phi} u_i dV = - \int_V (\sigma_{ij}^{\phi} u_i)_{,j} dV + \int_V \sigma_{ij}^{\phi} u_{i,j} dV = - \int_S \sigma_{ij}^{\phi} u_i n_j dS + \int_V \sigma_{ij}^{\phi} \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} dV$$

Las manipulaciones anteriores son formalmente análogas a las realizadas en el epígrafe anterior. Como en este sentido de la demostración se asume que se cumple (5.6), lo anterior debe ser igual a:

$$= \int_V \sigma_{ij}^{\phi} \varepsilon_{ij} dV - \int_S \bar{X}_i^{\phi} u_i^c dS$$

Agrupando términos de la última igualdad, tenemos:

$$\int_V \sigma_{ij}^{\phi} \left[ \varepsilon_{ij} - (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \right] dV + \int_S \bar{X}_i^{\phi} (u_i - u_i^c) dS = 0$$

Nuevamente, si la igualdad anterior fuese cierta sólo para un campo virtual de tensiones, no cabría extraer ninguna conclusión acerca de sus cofactores en los integrandos. Pero su cumplimiento para cualquier campo virtual de tensiones imaginable exige que los cofactores sean nulos, para que la igualdad a cero se asegure en todos los casos:

$$\varepsilon_{ij} - (u_{i,j} + u_{j,i})/2 = 0 \quad ; \quad u_i - u_i^c = 0$$

Las anteriores son precisamente las relaciones que queríamos obtener. Por tanto, el cumplimiento de la ecuación integral (5.6) para todo campo virtual posible de tensiones es también condición suficiente para que las deformaciones  $\varepsilon_{ij}$  sean las que corresponden a los desplazamientos  $u_i$ , y para que el valor de estos desplazamientos en  $S$  sea  $u_i^c$ .

Cabe también hacer algunas observaciones acerca del Principio de las Fuerzas Virtuales, que serán en gran parte paralelas a las realizadas acerca del PDV. La primera es que el cumplimiento de la ecuación integral (5.6) no garantiza absolutamente nada acerca del campo de tensiones "real"  $\sigma_{ij}$  (asociado a  $u_i$ ), que como se aprecia, ni siquiera aparece en (5.6). Los métodos de resolución basados en el PFV deben en algún momento imponer el equilibrio. La segunda observación es que el PFV es también válido para cualquier ley de comportamiento. Como tercera observación apuntaremos también que los términos de la ecuación integral (5.6) tienen dimensiones de trabajo, denominándose al miembro izquierdo trabajo interno de las tensiones virtuales, y al miembro derecho trabajo externo de las cargas virtuales. La cuarta y última observación es que la forma más frecuente del uso del PFV es el de la ecuación (5.6) como condición necesaria, planteándola para algún o algunos estados virtuales particulares.

Finalmente apuntaremos que cuando el único objetivo es utilizar las ecuaciones (5.5) o (5.6) como "ecuaciones que deben cumplirse" (como condiciones necesarias), es frecuente prescindir de las diferencias conceptuales entre ellas, considerando un campo de tensiones y fuerzas en equilibrio, pertenecientes a un estado "1", y un campo de deformaciones y desplazamientos compatibles, pertenecientes a otro estado "2" del sólido. De esta manera, tanto (5.5) como (5.6) se escriben:

$$\int_V \sigma_{ij}^1 \epsilon_{ij}^2 dV = \int_V X_i^1 u_i^2 dV + \int_S \bar{X}_i^1 u_i^{2c} dS$$

Donde los superíndices 1 y 2 refieren a los mencionados estados distintos del sólido, siendo circunstancial la consideración de uno de ellos como estado virtual. La ecuación integral anterior es una condición necesaria para que el conjunto de magnitudes (tipo fuerza) del estado 1 que aparecen cumplan las ecuaciones de equilibrio, junto con que las magnitudes (tipo deformación) del estado 2 que aparecen cumplan las condiciones de compatibilidad. Se conoce como Principio de los Trabajos Virtuales (PTV) al enunciado de esta condición necesaria, refundida del PDV y del PFV.

### 5.6.- Teoremas de Reciprocidad de Betti.

Los teoremas de reciprocidad que estudiaremos a continuación permiten dar respuesta a algunas posibles cuestiones sin necesidad de resolver completamente un problema elástico. En este aspecto, su utilidad es más patente en el cálculo de magnitudes definidas como promedios (u otro tipo de expresiones integrales) de las tensiones o desplazamientos. Estos teoremas serán también la herramienta básica que utilizaremos para calcular "coeficientes de influencia" en un epígrafe posterior. Además, el segundo teorema de reciprocidad puede considerarse como la base del Método de los Elementos de Contorno (MEC) en elasticidad. Se trata de un moderno método de cálculo que presenta ciertas ventajas sobre el Método de los Elementos Finitos en algunas aplicaciones, si bien sus posibilidades están aún bajo estudio.

Primer Teorema de Reciprocidad.

Considérese un campo cualquiera de tensiones y deformaciones "virtuales"  $\sigma_{ij}^0$ ,  $\epsilon_{ij}^0$ , que verifiquen la ley de Hooke:  $\sigma_{ij}^0 = C_{ijkl} \epsilon_{kl}^0$ .

El cumplimiento de la ecuación integral siguiente para cualquier campo de magnitudes virtuales:

$$\int_V \sigma_{ij}^0 \epsilon_{ij}^0 dV = \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^0 dV \quad (5.7)$$

Es condición necesaria y suficiente para que las tensiones y deformaciones reales  $\sigma_{ij}$ ,  $\epsilon_{ij}$ , satisfagan la ley de Hooke con las mismas constantes, es decir:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

Demostraremos en primer lugar que la expresión integral es una condición necesaria para que el campo real cumpla la ley de Hooke, con las mismas constantes elásticas que el virtual. Partimos pues de que se cumple  $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$ . Multiplicando por el campo virtual de deformaciones e integrando, tenemos:

$$\int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^0 dV = \int_V C_{ijkl} \epsilon_{kl} \epsilon_{ij}^0 dV = (C_{ijkl} = C_{klij}) = \int_V C_{klij} \epsilon_{ij}^0 \epsilon_{kl} dV$$

Como las magnitudes virtuales satisfacen en todo caso la ley de Hooke, será:

$$= \int_V \sigma_{kl}^0 \epsilon_{kl} dV = \int_V \sigma_{ij}^0 \epsilon_{ij} dV$$

Como queríamos demostrar. La demostración de que el cumplimiento de (5.7) es condición suficiente para que el campo real satisfaga la ley de Hooke se realiza también sin dificultad. Partimos del cumplimiento de la ecuación (5.7) y manipulamos el miembro izquierdo:

$$\int_V \sigma_{ij}^0 \epsilon_{ij} dV = \int_V \epsilon_{ij} C_{ijkl} \epsilon_{kl}^0 dV = (C_{ijkl} = C_{klij}) = \int_V \epsilon_{ij} C_{klij} \epsilon_{kl}^0 dV = \int_V \epsilon_{kl} C_{ijkl} \epsilon_{ij}^0 dV$$

En la última igualdad se ha intercambiado la pareja de subíndices mudos "ij" con la "kl" (es indiferente el símbolo empleado como subíndice mudo). Esta última integral debe ser, en virtud de (5.7):

$$\int_V C_{ijkl} \epsilon_{kl} \epsilon_{ij}^0 dV = \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^0 dV$$

La única manera de asegurar que se cumpla lo anterior para cualquier campo virtual imaginable de deformaciones  $\epsilon_{ij}^0$ , es que los factores que le multiplican en los integrandos sean iguales:

$$C_{ijkl} \epsilon_{kl} = \sigma_{ij}$$

Que es la igualdad que queríamos demostrar.



Segundo Teorema de Reciprocidad.

Considérese un campo "real" cualquiera de magnitudes elásticas (tensiones, deformaciones y desplazamientos), y otro campo "virtual", cada uno satisfaciendo las ecuaciones de compatibilidad, comportamiento y equilibrio:

$$\begin{array}{ccccccc} \varphi_i & \xleftarrow{\text{compatib.}} & \varepsilon_{ij}^\varphi & \xleftarrow{C_{ijkl}} & \sigma_{ij}^\varphi & \xleftarrow{\text{equilibrio}} & X_i^\varphi, \bar{X}_i^\varphi \\ u_i & \xleftarrow{\text{compatib.}} & \varepsilon_{ij} & \xleftarrow{C_{ijkl}} & \sigma_{ij} & \xleftarrow{\text{equilibrio}} & X_i, \bar{X}_i \end{array}$$

En estas condiciones se cumple la siguiente ecuación integral:

$$\int_V X_i^\varphi u_i dV + \int_S \bar{X}_i^\varphi u_i^c dS = \int_V X_i \varphi_i dV + \int_S \bar{X}_i \varphi_i dS \quad (5.8)$$

La demostración de lo anterior se realiza sin dificultad teniendo en cuenta en primer lugar que por cumplir el campo real las ecuaciones de equilibrio, y cumplir el campo virtual la ecuación de compatibilidad en el dominio, se cumplirá la ecuación integral del PDV (5.5). Nótese que, al igual que en el PDV, la "compatibilidad en el contorno" de los desplazamientos virtuales con unas ciertas funciones  $\varphi_i^c$ , no se incluye como premisa por no ser habitualmente de interés. En segundo lugar, por cumplir el campo real las ecuaciones de compatibilidad interna y en el contorno, y cumplir el campo virtual las ecuaciones de equilibrio, se cumplirá la ecuación del PFV (5.6). Reproducimos por comodidad estas ecuaciones:

$$\int_V \sigma_{ij}^\varphi \varepsilon_{ij} dV = \int_V X_i^\varphi u_i dV + \int_S \bar{X}_i^\varphi u_i^c dS \quad \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^\varphi dV = \int_V X_i \varphi_i dV + \int_S \bar{X}_i \varphi_i dS$$

Por otra parte, por estar relacionadas las tensiones y deformaciones del campo real mediante la ley de Hooke con las mismas constantes elásticas que lo están las tensiones y deformaciones virtuales, se satisface la ecuación (5.7) del Primer Teorema de Reciprocidad. Observamos que esto implica precisamente la igualdad entre los miembros izquierdos de las ecuaciones anteriores del PDV y PFV. Por lo tanto, los miembros derechos serán a su vez iguales entre sí, lo que constituye la ecuación (5.8) que queríamos demostrar.

Aunque el enunciado propuesto ha quedado demostrado, estableciendo que el cumplimiento de la ecuación integral (5.8) es condición necesaria para que el campo real satisfaga las ecuaciones básicas de la Elasticidad, el lector se preguntará acerca de la posibilidad de que la ecuación integral sea también condición suficiente, en analogía con las ecuaciones integrales de epígrafes precedentes. A este respecto, debemos apreciar que en la ecuación (5.8) no aparecen ni las tensiones ni las deformaciones reales, por lo que no cabe plantear que dicha ecuación pudiera ser condición suficiente por sí misma de ningún enunciado que afectase a estas variables.

No obstante, si se unen algunas hipótesis adicionales al cumplimiento de la propia ecuación (5.8), el conjunto resulta suficiente para que se satisfagan algunas otras relaciones. Por ejemplo, si el campo virtual satisface todas las ecuaciones de la elasticidad (lo que suponemos en todo caso), podemos demostrar el siguiente enunciado:

Si se satisface la ecuación integral (5.8) para todo campo virtual, y  $\varepsilon_{ij}$  es el campo de deformaciones asociado a  $u_i$  mediante las ecuaciones de compatibilidad interna, y además es  $\sigma_{ij}$  el campo de tensiones asociado a  $\varepsilon_{ij}$  mediante la ley de Hooke (con las mismas constantes elásticas que el campo virtual), entonces el campo real satisface la ecuación de compatibilidad en el contorno, y las de equilibrio interno y en el contorno. En forma más compacta, el enunciado anterior puede expresarse como:

$$\int_V X_i^\phi u_i dV + \int_S \bar{X}_i^\phi u_i^c dS = \int_V X_i \phi_i dV + \int_S \bar{X}_i \phi_i dS \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u_i &= u_i^c ; \quad \bar{X}_i = \sigma_{ij} n_j \quad \text{en } S \\ \varepsilon_{ij} &= (u_{i,j} + u_{j,i})/2 ; \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad \text{en } V \end{aligned}$$

Para demostrar lo anterior comenzamos por manipular la primera de las integrales:

$$\begin{aligned} \int_V X_i^\phi u_i dV &= -\int_V \sigma_{ij,j}^\phi u_i dV = -\int_V (\sigma_{ij}^\phi u_i)_{,j} dV + \int_V \sigma_{ij}^\phi u_{i,j} dV = -\int_S \sigma_{ij}^\phi u_i n_j dS + \int_V \sigma_{ij}^\phi \varepsilon_{ij} dV = \\ & \text{(1er Tª Recipr.)} = -\int_S \bar{X}_i^\phi u_i dS + \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^\phi dV = -\int_S \bar{X}_i^\phi u_i dS + \int_V \sigma_{ij} \phi_{i,j} dV = \\ & = -\int_S \bar{X}_i^\phi u_i dS + \int_S \sigma_{ij} \phi_i n_j dS - \int_V \sigma_{ij,j} \phi_i dV \end{aligned}$$

Nótese que en la manipulación anterior se ha hecho uso de las dos hipótesis adicionales: compatibilidad del campo real (3ª igualdad), y ley de Hooke en el campo real (primer teorema de reciprocidad). Llevando esto a la expresión integral y agrupando términos, resulta:

$$\int_S (u_i^c - u_i) \bar{X}_i^\phi dS + \int_S (\sigma_{ij} n_j - \bar{X}_i) \phi_i dS - \int_V (\sigma_{ij,j} + X_i) \phi_i dV = 0$$

Para asegurar que lo anterior se satisfaga para cualquier campo virtual imaginable de magnitudes, deben ser cero los factores que multiplican a las magnitudes virtuales en los integrandos, es decir:

$$u_i^c - u_i = 0 \quad \text{en } S ; \quad \sigma_{ij} n_j - \bar{X}_i = 0 \quad \text{en } S ; \quad \sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad \text{en } V$$

Las tres ecuaciones anteriores reproducen la ecuación de compatibilidad en el contorno, y las ecuaciones de equilibrio en el contorno y en el dominio, respectivamente, como queríamos demostrar. Por lo tanto, con las condiciones adicionales que se han especificado, la ecuación integral (5.8) es también condición suficiente para que el campo real esté en equilibrio, y además se satisfaga la ecuación de compatibilidad en el contorno.

Como nota final insistiremos en que la dificultad de establecer la suficiencia de la ecuación integral (5.8) estriba en que en la misma no aparecen ni  $\epsilon_{ij}$  ni  $\sigma_{ij}$ . Estos sólo pueden introducirse a partir de  $u_i$  si se asume que  $\epsilon_{ij}=(u_{i,j}+u_{j,i})/2$ , como se ha mostrado, o a partir de las fuerzas de volumen y de contorno si se asume el equilibrio del campo real. Esto último tiene menor interés teórico, por lo que se omite la demostración correspondiente. De todas formas el interés práctico se centra en la utilización de la expresión integral (5.8) como condición necesaria, para uno o varios estados virtuales concretos, tal como ocurre con las demás expresiones integrales.

**5.7.- Teorema de la mínima energía potencial.**

Las formulaciones variacionales son una técnica matemática potente que tiene el atractivo de permitir un tratamiento formal unificado (hasta cierto punto) de los problemas físicos, poniendo de relieve analogías entre las magnitudes de diversas disciplinas. Para utilizar este tipo de enfoque debe encontrarse una magnitud escalar que tome distintos valores para las distintas soluciones que podamos ensayar, pero que alcance un mínimo para la solución verdadera. Si ello es posible, entonces la resolución del problema se reduce al de encontrar un valor mínimo. Demostraremos que en elasticidad existe una magnitud con estas características, que llamaremos energía potencial.

Consideremos un sólido en equilibrio bajo las acciones  $X_i$ ,  $\bar{X}_i$ , de volumen y de contorno respectivamente, y cuyo campo de desplazamientos es  $u_i$ . Consideremos un campo de desplazamientos ligeramente modificado,  $u_i + \delta u_i$ , donde  $\delta u_i$  es una pequeña variación virtual. El trabajo de las acciones durante el pequeño desplazamiento virtual será:

$$\int_V X_i \delta u_i dV + \int_S \bar{X}_i \delta u_i dS$$

Esta suma de dos integrales reproduce el miembro derecho de la expresión (5.5) del PDV, siendo ahora  $\delta u_i$  el campo virtual de desplazamientos. El campo de tensiones del sólido en equilibrio,  $\sigma_{ij}$ , cumplirá las ecuaciones de equilibrio con las fuerzas de volumen y de contorno. Por ello, la expresión (5.5) del PDV debe satisfacerse. Llamando  $\delta \epsilon_{ij}$  a las deformaciones asociadas a  $\delta u_i$ , tenemos:

$$\int_V X_i \delta u_i dV + \int_S \bar{X}_i \delta u_i dS = \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV$$

La ecuación anterior es una forma de expresar el PDV sin ninguna hipótesis adicional, y por tanto es válida para cualquier ley de comportamiento. Poniendo el tensor de tensiones en función de la densidad de energía de deformación, y aplicando a la variación virtual las propiedades usuales de los diferenciales, la última integral puede escribirse como:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_V \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_V \delta W dV = \delta \left[ \int_V W dV \right]$$

Por lo tanto:

$$\delta \left[ \int_V W dV \right] - \int_V X_i \delta u_i dV - \int_S \bar{X}_i \delta u_i dS = 0 \quad (5.9)$$

La anterior es una forma del PDV válida sólo cuando existe la densidad de energía de deformación, y por tanto requiere que el sólido tenga comportamiento elástico, ya sea lineal o no lineal. Vamos a particularizar esta expresión para el caso en que las fuerzas actuantes sean conservativas, lo que es frecuente en los problemas de mecánica de sólidos. Por definición, una fuerza es conservativa si su valor puede obtenerse como la derivada respecto a los desplazamientos de una cierta función potencial. Ejemplos de este tipo de fuerzas son las gravitatorias, y las fuerzas de contorno aplicadas por contacto o tracción directa. Una excepción notable son las fuerzas de tipo aerodinámico que un fluido en movimiento puede ejercer sobre un sólido. Sean  $\xi$  y  $\bar{\xi}$  los potenciales de los que derivan respectivamente las fuerzas de volumen y de contorno de nuestro problema. Por ejemplo, en el caso sencillo de un resorte de rigidez  $K$ , hay que producir un alargamiento  $x$  para que la fuerza sobre el resorte sea  $F=Kx$ . La función potencial en este caso sería  $\xi = -Kx^2/2$ , ya que  $F=-\partial\xi/\partial x$ . Con nuestras funciones potenciales tendremos, por su definición:

$$X_i = -\frac{\partial \xi}{\partial u_i} \quad ; \quad \bar{X}_i = -\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial u_i}$$

Con lo que las dos últimas integrales de (5.7) quedan:

$$-\int_V X_i \delta u_i dV - \int_S \bar{X}_i \delta u_i dS = \int_V \frac{\partial \xi}{\partial u_i} \delta u_i dV + \int_S \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial u_i} \delta u_i dS = \delta \left[ \int_V \xi dV + \int_S \bar{\xi} dS \right]$$

Lo que permite escribir (5.9) como:

$$\delta \left[ \int_V (W + \xi) dV + \int_S \bar{\xi} dS \right] = \delta V = 0 \quad (5.10)$$

En donde se ha definido la "energía potencial total"  $\mathcal{V}$  del sistema como la expresión entre corchetes del primer miembro. Esta expresión encierra el enunciado del teorema objeto de este epígrafe:

En la posición de equilibrio, la energía potencial total  $\mathcal{V}$  tiene un valor extremo (máximo o mínimo).

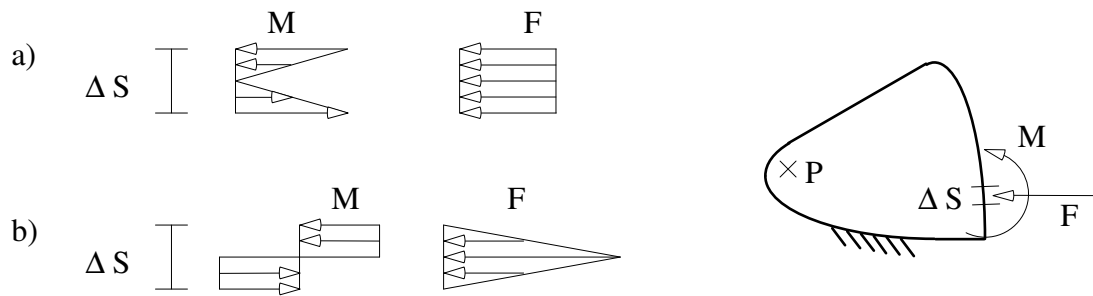
Puede demostrarse que siendo la densidad de energía de deformación una función definida positiva, el extremo aludido es un mínimo. Omitimos aquí esta demostración.

Finalmente, nótese que el campo de desplazamientos que incluye la variación virtual,  $u_i + \delta u_i$ , puede ser absolutamente general. No obstante en la práctica suele restringirse esta generalidad, haciendo que este campo satisfaga las condiciones de contorno en desplazamientos (es decir, se impone  $\delta u_i = 0$  en las zonas de desplazamiento prescrito). La ventaja práctica que se persigue con ello es excluir de la evaluación de la integral de contorno de (5.9), o su homóloga de (5.10), las zonas en donde la tensión de contorno es desconocida a priori.

### 5.8.- Principio de Saint-Venant.

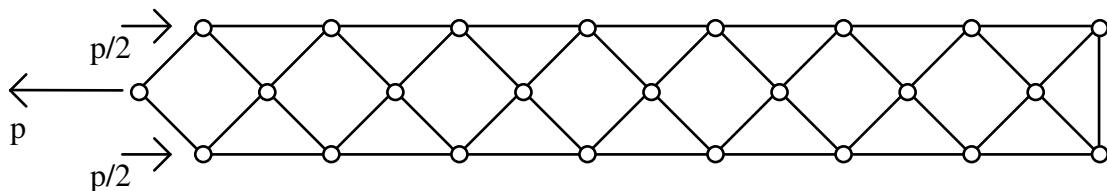
Presentaremos ahora un principio cuya justificación es totalmente experimental, aunque sea posible dar argumentos físicos en su favor. Además, este principio no es aplicable en ciertas situaciones. Ello hace que pueda resultar sorprendente encontrar su enunciado en el contexto del modelo matemático de la Teoría de la Elasticidad, cuya robustez es notoria. No obstante, se trata de un principio muy útil para conseguir soluciones de suficiente exactitud desde el punto de vista de las aplicaciones prácticas. La exposición siguiente no se ajusta exactamente a la forma presentada por Saint-Venant en 1855, sino que incide en la conclusión de mayor aplicabilidad práctica.

Sea  $\Delta S$  una pequeña porción del contorno  $S$  de un sólido, como indica la figura 5.3. El principio de Saint-Venant establece que a distancias grandes, -comparadas con las dimensiones de  $\Delta S$ -, la solución elástica (desplazamientos, tensiones, etc.) diferirá muy poco si se sustituyen las cargas que actúan sobre  $\Delta S$  por otro sistema de cargas distinto, pero estáticamente equivalente (de igual resultante e igual momento resultante). Por ejemplo, en el punto  $P$  de la figura, esperamos similares movimientos y tensiones cuando actúa el sistema de cargas a) sobre la porción  $\Delta S$  del contorno, que cuando actúa el sistema b), que es estáticamente equivalente. Ambos sistemas de cargas constan de la superposición de una distribución de tensiones de resultante  $F$  mas otra distribución de resultante nula y momento  $M$ .



**Figura 5.3.-** Acciones estáticamente equivalentes sobre una pequeña superficie.

A pesar de que la intuición física pudiera parecer suficiente para justificar este principio, hay ocasiones en que el mismo no es de aplicación. Desafortunadamente hay que invocar a la experiencia previa si se pretende juzgar de antemano cuándo puede aplicarse razonablemente y cuando no. Una excepción notable es la torsión con alabeo restringido de barras de perfil de pared delgada, que se estudia habitualmente en el contexto de la Resistencia de Materiales. Pueden encontrarse algunas excepciones más en algunas estructuras particulares de barras con nudos articulados, como la de la figura 5.4. En efecto, si contemplamos la estructura en su conjunto, la zona en la que actúa el sistema autoequilibrado de cargas ( $p/2$ ,  $-p$ ,  $p/2$ ) es una pequeña zona del contorno de la misma, por lo que cabría esperar que a grandes distancias (zona derecha de la estructura) los esfuerzos en las barras fuesen próximos a cero. Sin embargo, puede comprobarse (equilibrando sucesivamente los nudos), que tanto las barras próximas a la zona de aplicación de las cargas como las más lejanas soportan esfuerzos de idéntica magnitud.



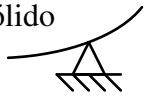
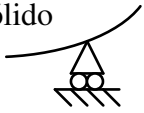


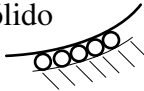

**Figura 5.4.-** Una excepción respecto del Principio de Saint-Venant.

### 5.9.- Algunas notas acerca de las condiciones de contorno.

Independientemente del enfoque o de las ecuaciones que se empleen para resolver un problema, siempre deben imponerse las condiciones de contorno del mismo durante la resolución. Como es evidente, una deficiente imposición de las condiciones de contorno hará inútil el esfuerzo posterior de resolución, ya que en el mejor de los casos se estará resolviendo un problema distinto del planteado inicialmente. Seguidamente revisaremos algunos tipos básicos de condiciones de contorno.

En problemas elásticos que afectan a un solo sólido, debe tenerse presente como regla básica que en cada punto del contorno, si está restringido el movimiento según una dirección del espacio, la componente del vector tensión según esa dirección debe ser incógnita. Análogamente, si es conocida una componente de tensión, la correspondiente componente de desplazamiento debe ser incógnita. Esta sencilla regla nos asegura el

correcto planteamiento de nuestro problema, en el sentido de que cumpla las condiciones del teorema de unicidad de Kirchoff. Todas condiciones de contorno representadas esquemáticamente en la figura 5.5 son posibilidades válidas. Existen otras posibilidades válidas, como por ejemplo la imposición de un valor no nulo de desplazamiento en lugar del valor nulo representado en las condiciones de apoyo.

Desplazamiento prescrito	Prescrita una componente de desplaz. y otra de tensión.	Tensión prescrita
<p>sólido</p>  <p>En un punto ("apoyo fijo")</p>	<p>sólido</p>  <p>En un punto ("apoyo móvil")</p>	<p>sólido</p>  <p>("fuerza puntual")</p>
<p>sólido</p>  <p>En una región de S</p>	<p>sólido</p>  <p>En una región de S</p>	<p>sólido</p>  <p><math>\bar{X}</math> prescrito</p>

**Figura 5.5.-** Algunas posibilidades válidas de condiciones de contorno.

Se entiende como "fuerza puntual" al límite de una distribución de tensiones  $\bar{X}_i$  usual (también de una fuerza de volumen  $X_i$ ), cuyos valores son arbitrariamente grandes, pero que actúa sobre una porción arbitrariamente pequeña del contorno, de tal manera que la fuerza resultante (integral del vector tensión o de la fuerza de volumen) tiene el valor vectorial de la fuerza concentrada especificada. Así, si se da una fuerza puntual de componentes  $F_i$  sobre un punto P del contorno, debemos entender que se trata de una distribución muy intensa de tensiones  $\bar{X}_i$ , que actúa sobre una porción muy pequeña  $\epsilon S(P)$  del contorno, en torno al punto P dado, de manera que se cumple:

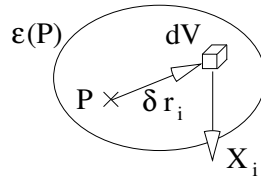
$$\int_{\epsilon S(P)} \bar{X}_i dS = F_i$$

La interpretación anterior debiera ser tenida en cuenta cada vez que se necesite tratar una fuerza puntual, por ejemplo en el contexto de los teoremas integrales presentados en este capítulo. En todo caso, si una componente de fuerza es conocida, la componente del desplazamiento en ese punto debe ser incógnita, y viceversa (caso de un apoyo). Una fuerza concentrada interior al sólido se interpreta análogamente, como una distribución de fuerzas de volumen  $X_i$  muy intensa que actúa sobre un volumen muy pequeño. El trabajo virtual de una fuerza concentrada es igual al producto escalar de la fuerza por el desplazamiento virtual de su punto de aplicación. Un momento concentrado admite una interpretación similar, con salvedades que analizaremos detenidamente a continuación.

El trabajo de un momento.

Al igual que una fuerza concentrada, un momento concentrado es una abstracción matemática que físicamente se interpreta como una distribución de fuerzas de volumen

$X_i$  muy intensa que actúa sobre una porción muy pequeña del sólido, de forma que su resultante es nula, pero no así su momento resultante, cuyas componentes serán  $M_i$ . La figura 5.6 ilustra la idea anterior, siendo  $\varepsilon(P)$  la pequeña porción de sólido en torno al punto  $P$  en que la fuerza de volumen  $X_i$  no es nula, y  $\delta r_i$  el vector que une el punto  $P$  con un elemento diferencial de volumen genérico.



$$\int_{\varepsilon(P)} X_i dV = 0$$

$$\int_{\varepsilon(P)} r \times X dV = \int_{\varepsilon(P)} e_{ijk} r_j X_k dV = M_i$$

**Figura 5.6.-** Esquema físico de la aplicación de un momento concentrado.

El trabajo virtual de la fuerza de volumen  $X_i$  con el campo de desplazamientos  $\varphi_i$  vendrá dado por la integral:

$$\int_{\varepsilon(P)} X_i \varphi_i dV \cong \int_{\varepsilon(P)} X_i [\varphi_i(P) + \varphi_{i,j}(P) \delta r_j] dV = \varphi_i(P) \int_{\varepsilon(P)} X_i dV + \varphi_{i,j}(P) \int_{\varepsilon(P)} X_i \delta r_j dV$$

La primera integral del último miembro se anula por ser nula la resultante de la fuerza de volumen. Precisamente ha sido preciso considerar un desarrollo en serie de  $\varphi_i$  hasta derivadas primeras para retener las aportaciones no nulas (ni despreciables). La última integral puede escribirse como:

$$\varphi_{i,j}(P) \int_{\varepsilon(P)} X_i \delta r_j dV = (\varepsilon_{ij}^\varphi + \omega_{ij}^\varphi) \int_{\varepsilon(P)} X_i \delta r_j dV = \varepsilon_{ij}^\varphi \int_{\varepsilon(P)} X_i \delta r_j dV + \omega_{ij}^\varphi \int_{\varepsilon(P)} X_i \delta r_j dV$$

En donde la deformación y la rotación se entienden evaluadas en el punto  $P$ . Así pues, el trabajo del momento (es decir, de las fuerzas de volumen a las que representa) tiene los dos sumandos que aparecen en el último miembro de la igualdad anterior. Es fácil comprobar que el segundo sumando tiene el significado de "producto escalar del vector rotación por el momento", que nos resulta familiar. Véase:

$$\omega_{ij}^\varphi \int_{\varepsilon(P)} X_i \delta r_j dV = e_{jik} \omega_k^\varphi \int_{\varepsilon(P)} X_i \delta r_j dV = \omega_k^\varphi \int_{\varepsilon(P)} e_{jik} X_i \delta r_j dV = \omega_k^\varphi M_k$$

Pero no hay razón para que el sumando que contiene a la deformación se anule. Por otra parte, el mismo no es expresable en función del momento resultante, en general. El valor de este sumando depende de la tipología particular de la distribución  $X_i$  en el pequeño dominio  $\varepsilon(P)$  en el que actúa. Por lo tanto, la expresión más concreta que podemos ofrecer del trabajo de un momento es:

$$\int_{\varepsilon(P)} X_i \varphi_i dV = \omega_i^\varphi M_i + \varepsilon_{ij}^\varphi \int_{\varepsilon(P)} X_i \delta r_j dV$$



En mecánica del sólido rígido las deformaciones son nulas, por lo que el segundo sumando se anula. En sólidos con forma de barra, las hipótesis que usualmente adopta la Resistencia de Materiales hacen que el último sumando sea despreciable. En ambos casos se revierte a la expresión más familiar de "momento por giro". Todo ello podría inducir al lector a pensar que el trabajo de un momento tiene siempre ese valor, cosa que, en rigor, es incorrecta. Existen sin embargo argumentos físicos que permiten despreciar el segundo sumando en ciertas situaciones. Por ejemplo, si el momento está aplicado mediante la torsión de una varilla de pequeña sección (en comparación con las dimensiones del sólido), que tiene uno de sus extremos soldado a la superficie del sólido, es concebible que el efecto rigidizador de la varilla en la zona soldada impida que existan deformaciones importantes *en esa zona* (aunque sean grandes en sus proximidades). Por tanto, en este caso pueden existir argumentos para despreciar el segundo sumando.

Por otra parte, la integral que multiplica a la deformación en el segundo sumando tiene *cierta propensión* a ser un tensor antisimétrico en casos prácticos. En el caso en que esto sea así, su producto por la deformación (tensor simétrico) será nulo. Por ejemplo, puede comprobarse que si el momento se aplica en un pequeño dominio circular mediante una distribución de fuerzas dada en coordenadas polares por  $X_\theta = -Ar$ ;  $X_r=0$ , la integral del segundo sumando resulta ser un tensor antisimétrico, por lo que dicho sumando se anula. Esta forma de aplicar el momento correspondería aproximadamente a la utilización de una varilla de sección circular sometida a torsión, y soldada por un extremo a la superficie del sólido. Los argumentos anteriores conducen a despreciar el segundo sumando en la ecuación del trabajo del momento, en muchas situaciones usuales.

Con el fin de comprobar que el referido segundo sumando no tiene porqué anularse en condiciones más generales, se sugiere que el lector trabaje el ejemplo bidimensional de una distribución de fuerzas  $X_1 = A x_2$ ,  $X_2 = -B x_1$ , actuando sobre un rectángulo de dimensiones pequeñas  $2\delta_1 \times 2\delta_2$ , con los lados paralelos a los ejes  $x_1 x_2$ , y en cuyo centro se sitúa el origen de coordenadas. Esta distribución es equivalente a un momento, pudiéndose comprobar que "el segundo sumando" no se anula en general (aunque lo haga en algún caso particular, como por ejemplo  $\delta_1 = \delta_2$ ;  $A=B$ ). Otro caso en el que el segundo sumando tampoco se anula, es cuando el momento está aplicado como un par de fuerzas concentradas de gran valor, y muy próximas entre sí. Esta última imagen de un momento es probablemente la más popular, pero es la menos representativa de la realidad física, ya que describe una abstracción (momento concentrado) en base a otra abstracción (fuerza concentrada).

#### Problemas con un plano de simetría.

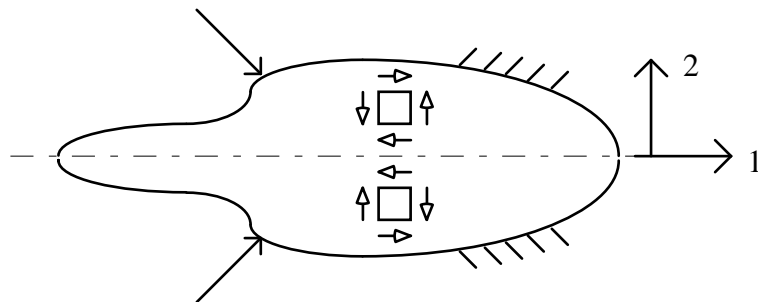
Cuando el problema a analizar presenta simetría respecto de un plano, es posible analizar solamente una de las mitades del sólido, imponiendo en el plano de simetría las condiciones de contorno adecuadas. Para encontrar estas condiciones de contorno, basta

reparar en que si el problema presenta simetría (tanto geométrica como en condiciones de contorno en tensiones y desplazamientos), las tensiones, desplazamientos, etc., en puntos simétricos serán también simétricos. Por ejemplo, si como indica la figura 5.7, el plano 1-3 es de simetría, tendremos que:

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = u_1(x_1, -x_2, x_3)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = -u_2(x_1, -x_2, x_3)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = u_3(x_1, -x_2, x_3)$$



**Figura 5.7.-** Problema con plano de simetría 1-3.

La segunda de las ecuaciones anteriores implica que en el plano 1-3 ( $x_2=0$ ) debe ser  $u_2=0$ . Por otra parte, el que el estado de tensiones sea simétrico requiere que (la figura 5.7 muestra la simetría de la componente 12 de tensión, como ejemplo):

$$\sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_{11}(x_1, -x_2, x_3)$$

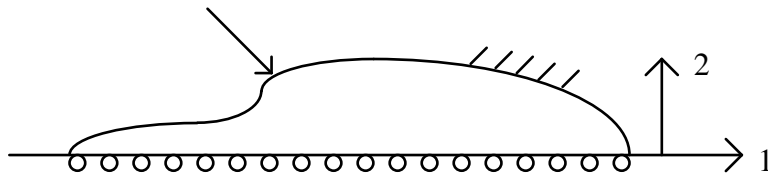
$$\sigma_{12}(x_1, x_2, x_3) = -\sigma_{12}(x_1, -x_2, x_3)$$

$$\sigma_{22}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_{22}(x_1, -x_2, x_3)$$

$$\sigma_{13}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_{13}(x_1, -x_2, x_3)$$

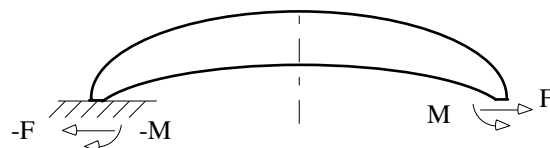
$$\sigma_{33}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_{33}(x_1, -x_2, x_3)$$

$$\sigma_{23}(x_1, x_2, x_3) = -\sigma_{23}(x_1, -x_2, x_3)$$



**Figura 5.8.-** Condiciones de contorno a aplicar en un plano de simetría.

De las ecuaciones relativas a  $\sigma_{12}$  y a  $\sigma_{23}$  anteriores, se sigue que en el plano 1-3 ( $x_2=0$ ) deben ser  $\sigma_{12}=0$  y  $\sigma_{23}=0$ . Recapitulando las condiciones encontradas, el plano de simetría debe permanecer plano con sus puntos moviéndose en el mismo plano ( $u_2=0$ ), y debe tener tensión tangencial nula  $\tau=0$  ( $\sigma_{12}$  y  $\sigma_{23}$  son las componentes de  $\tau$  en el plano 1-3). Estas condiciones se reproducen esquemáticamente en la figura 5.8, y son las condiciones a imponer en un plano de simetría cuando se desee analizar sólo la mitad del sólido.



**Figura 5.9.-** Ejemplo de simetría en tensiones pero no en desplazamientos.

Pueden presentarse también casos con simetría de tensiones respecto de un plano, pero no de desplazamientos. En la figura 5.9, con la aproximación (razonable en el sentido de Saint-Venant) de que la distribución de tensiones en el apoyo izquierdo es simétrica respecto de la de la zona derecha homóloga, tenemos un ejemplo de este tipo de problema. En casos como este, evidentemente se mantiene el hecho de que las tensiones tangenciales son nulas en el plano de simetría de tensiones. Un razonamiento basado en la superposición de un movimiento de sólido rígido al problema del mismo sólido con las mismas tensiones en (todo) el contorno, y que además presente simetría en desplazamientos, conduce inmediatamente a que el plano de simetría debe seguir siendo plano tras la deformación. Sin embargo, ya no será cierto que los puntos del plano de simetría se muevan dentro de su plano.

Planos que no permanecen planos.

Como acaba de mostrarse, un plano de simetría de tensiones permanecerá plano tras la deformación. Además, un plano de simetría de tensiones siempre tendrá tensión tangencial nula. Esto puede hacer pensar erróneamente que el que la tensión tangencial sea nula en un plano implique que el mismo deba permanecer plano tras la deformación. Otro indicio que puede contribuir a reforzar esta idea equivocada, es que en sólidos con forma de barra sometidos a diversas sollicitaciones, que constituyen el objeto de estudio de la Resistencia de Materiales, el alabeo de la sección se asocia típicamente a la presencia de tensiones tangenciales ("alabeo" es el término que describe que una sección transversal de la barra deja de ser plana tras la deformación). La conclusión anterior no es generalizable a sólidos de geometría arbitraria. Para mostrarlo, puede analizarse un contraejemplo sencillo, construido como se propone a continuación.

Consideremos un sólido bidimensional que ocupa una cierta región del plano  $x_1 x_2$ , y que contiene al menos a la porción del eje  $x_2$  entre el origen y un punto  $A(0, x_2)$ . La deformación transversal  $\epsilon_{12}$  (y por tanto  $\sigma_{12}$ ) es nula en los puntos que están situados sobre el eje  $x_2$ . Aunque serán irrelevantes para nuestros propósitos, podemos considerar como condiciones de contorno, que el origen  $(0,0)$  tiene desplazamiento y rotación nulos. En forma concisa, tenemos:

En puntos del eje $x_2$ :	Condiciones de contorno en $(0,0)$ :
$\epsilon_{11}(0, x_2) = u_{1,1}(0, x_2) \neq 0$	$u_1(0,0) = 0$
$\epsilon_{22}(0, x_2) = u_{2,2}(0, x_2) \neq 0$	$u_2(0,0) = 0$
$2\epsilon_{12}(0, x_2) = u_{1,2}(0, x_2) + u_{2,1}(0, x_2) = 0$	$2\omega_{12}(0,0) = u_{1,2}(0,0) - u_{2,1}(0,0) = 0$

Integrando, calcularemos el desplazamiento del punto genérico A sobre el eje 2:

$$u_1 = \int_0^A \epsilon_{11} dx_1 + f(x_2) \quad (dx_1 \equiv 0) = f(x_2) ; \quad u_2 = \int_0^A \epsilon_{22} dx_2 + g(x_1)$$

$$2\epsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} = 0 \Rightarrow \frac{df(x_2)}{dx_2} + \frac{dg(x_1)}{dx_1} + \int_0^A \epsilon_{22,1} dx_2 = 0$$

Donde  $f(x_2)$  y  $g(x_1)$  son por ahora funciones arbitrarias. Puesto que se requiere calcular derivadas  $u_2$  respecto de  $x_1$ , no se particularizó aún  $g(x_1)$  en  $x_1=0$ . Para completar el cálculo de los desplazamientos se necesita conocer la forma de  $\epsilon_{22}$ . Dado que solo pretendemos encontrar un contraejemplo, sirve cualquier caso particular que conduzca al resultado deseado. Consideremos que  $\epsilon_{22}=x_1h(x_2)$  en todo el sólido, o al menos en una región en torno al eje  $x_2$ , siendo  $h(x_2)$  una cierta función conocida, que supondremos polinómica para fijar ideas. Tendremos:

$$\frac{df(x_2)}{dx_2} + \int_0^{x_2} h(x_2)dx_2 + \left. \frac{dg(x_1)}{dx_1} \right|_{x_1=0} = 0 \Rightarrow \frac{df(x_2)}{dx_2} + H(x_2) + \left. \frac{dg(x_1)}{dx_1} \right|_{x_1=0} = 0$$

Hemos llamado  $H(x_2)$  a la función primitiva de  $h(x_2)$ , que será un polinomio de un orden superior al de  $h(x_2)$ . La última ecuación consta de una adición de términos que dependen de  $x_2$  igualada a cero. Nótese que la derivada de  $g(x_1)$  en  $x_1=0$  es una cierta constante, que llamaremos  $-K$ . Por tanto:

$$\left. \frac{dg(x_1)}{dx_1} \right|_{x_1=0} = -K ; \quad \frac{df(x_2)}{dx_2} = -H(x_2) + K$$

Integrando:

$$f(x_2) = -\int H(x_2)dx_2 + Kx_2 + B$$

La integral de  $H$  representa un polinomio de un orden mayor que  $H$ , y que no tiene término constante ( $B$  recoge esta constante). Nótese que las condiciones establecidas en nuestro enunciado no determinan completamente la función  $g(x_1)$ . Las componentes de desplazamiento son:

$$u_1 = -\int H(x_2)dx_2 + Kx_2 + B ; \quad u_2 = \int_0^A x_1h(x_2)dx_2 + g(x_1) = (x_1 = 0) = g(0)$$

De la aplicación de las condiciones de contorno en el origen resulta:

$$u_1(0,0) = 0 \Rightarrow B = 0 ; \quad u_2(0,0) = 0 \Rightarrow g(x_1 = 0) = 0$$

$$u_{1,2}(0,0) = u_{2,1}(0,0) \Rightarrow -H(0) + K = \left[ \int_0^A h(x_2)dx_2 + \left. \frac{dg(x_1)}{dx_1} \right]_{(0,0)} = H(0) - K$$

Al ser  $H(x_2)$  una integral de  $h$  entre el origen y la coordenada  $x_2$  del punto  $A$ , será  $H(0)=0$ , dado que el intervalo de integración se anula. Por tanto, la última igualdad conduce a que  $K=0$ . Con esto, los desplazamientos del punto  $A(0,x_2)$  quedan:

$$u_1(0, x_2) = -\int H(x_2)dx_2 ; \quad u_2(0, x_2) = 0$$

Las coordenadas  $(z_1, z_2)$  de la posición final de los puntos  $A$  que inicialmente estaban en las posiciones  $(0, x_2)$  se obtienen mediante  $z_i = x_i + u_i$ , es decir:

$$z_1 = -\int H(x_2)dx_2 \quad ; \quad z_2 = x_2$$

Las dos ecuaciones anteriores definen de forma paramétrica (siendo el parámetro  $x_2$ ) las coordenadas  $z_1, z_2$  de los puntos de la curva en que se ha transformado la línea del sólido que inicialmente coincidía con el eje 2. La curvatura de una curva dada su expresión paramétrica es:

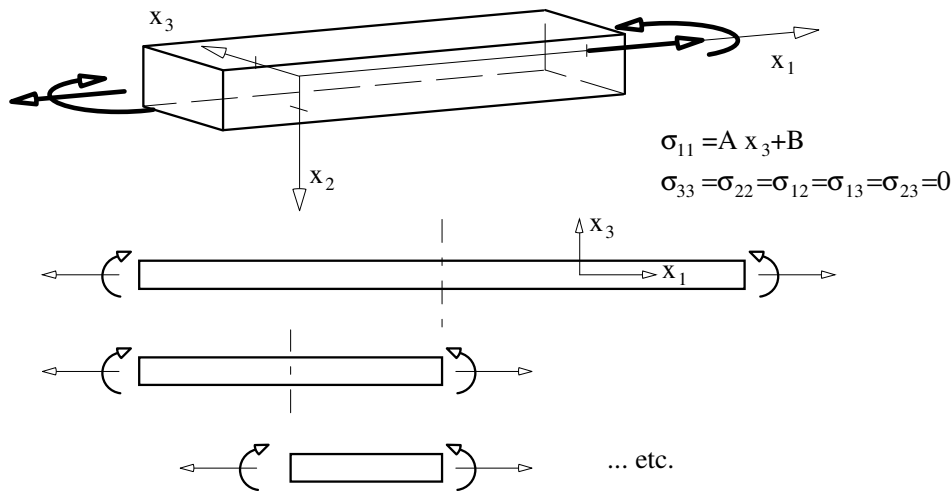
$$\kappa = \frac{\begin{vmatrix} z'_1 & z'_2 \\ z''_1 & z''_2 \end{vmatrix}}{\left[ (z'_1)^2 + (z'_2)^2 \right]^{3/2}}$$

Donde las primas denotan el orden de derivación de la coordenada respecto del parámetro. La curvatura será distinta de cero si lo es el determinante que aparece en el numerador. Sustituyendo los valores  $z'_1 = -H(x_2)$ ,  $z'_2 = 1$ ,  $z''_1 = -h(x_2)$ ,  $z''_2 = 0$ , el valor del determinante resulta ser  $h(x_2)$ . Por tanto la curvatura de la deformada no es nula, mostrando que la condición de que exista tensión tangencial nula en un plano no implica que ese plano permanezca plano tras la deformación.

El lector puede construir contraejemplos concretos referidos a todo un dominio basándose en el desarrollo anterior. Por ejemplo, tomando  $\epsilon_{11}(x_2, x_2) = 0$ ;  $h(x_2) = x_2$ ;  $g(x_1) = 0$  ( $g$  y su primera derivada deben anularse en  $x_1 = 0$ ; no se le requiere ninguna otra condición), tendremos  $H(x_2) = x_2^2/2$ , y el campo de desplazamientos (en puntos que ahora pueden no estar sobre el eje  $x_2$ ) será:

$$u_1 = \int_0^A \epsilon_{11} dx_1 + f(x_2) = 0 - \frac{x_2^3}{6} \quad ; \quad u_2 = \int_0^{x_2} x_1 x_2 dx_1 = \frac{x_1 x_2^2}{2}$$

Puede comprobarse que, en efecto, este campo de desplazamientos tiene  $\epsilon_{12} = 0$  en el eje  $x_2$  (y en todo punto) y que la configuración deformada de los puntos inicialmente en  $(0, x_2)$  está dada por las coordenadas  $(z_1, z_2)$  de valor  $z_1 = -x_2^3/6$ ;  $z_2 = x_2$ ; que no representa la ecuación de una recta. En el caso en que hubiéramos tomado  $h(x_2) = 0$ , y por tanto  $\epsilon_{22} = 0$ , se habría obtenido curvatura nula de la deformada del eje. En el caso en que  $\epsilon_{22}$  dependiera solamente de  $x_2$ , también se obtendría curvatura nula.



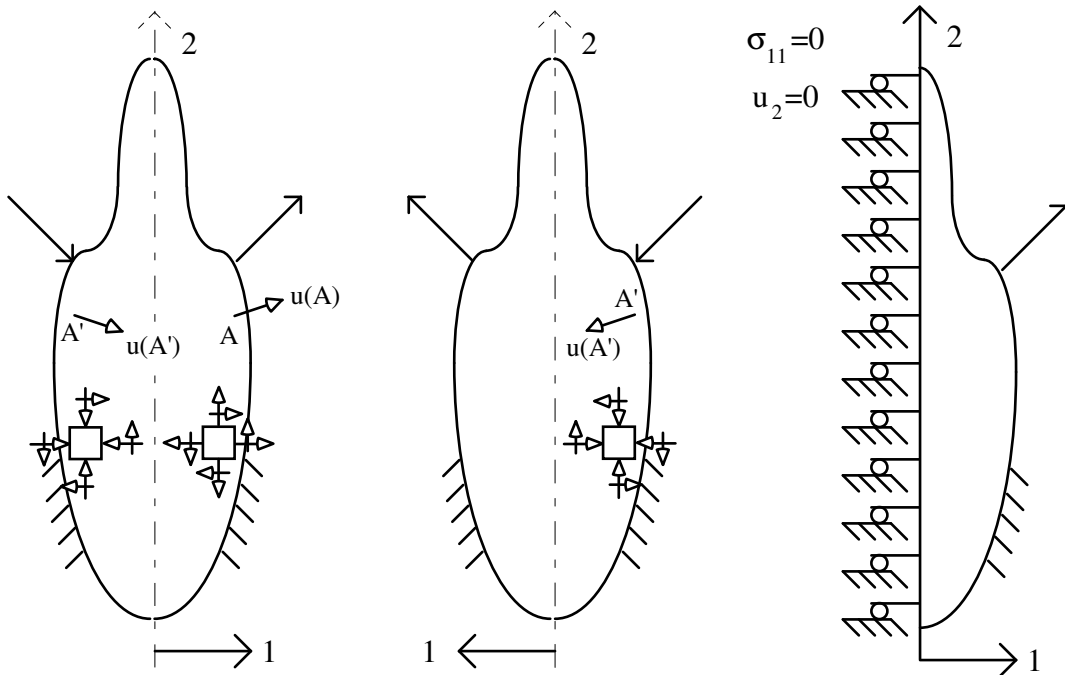
**Figura 5.10.-** Simetrías sucesivas en una barra recta sometida a flexión-tracción.

Dado su especial interés, el caso de barras rectas que estudia la Resistencia de Materiales merece una referencia particular. Las condiciones de tracción-flexión asumen que la componente normal de tensión varía linealmente en la sección y las demás son nulas, incluso en los extremos de la barra. Por ejemplo  $\sigma_{11} = A x_3 + B$  (que en la figura 5.10 se representa por simplicidad mediante una fuerza y un momento aplicados en el centro de áreas de la sección). Bajo estas condiciones, un razonamiento de simetrías sucesivas evidencia que cualquier sección permanecerá plana tras la deformación. Bajo otros tipos de sollicitación las secciones no permanecerán planas, en general. En el capítulo siguiente retomaremos el caso de tracción-flexión y analizaremos algún otro caso particular.

#### Problemas con plano de antisimetría.

Existe antisimetría respecto de un plano cuando el sólido tiene geometría inicialmente simétrica respecto del plano, pero en cada mitad del sólido las cargas de volumen y las condiciones de contorno (tanto en tensiones como en desplazamientos) son de signo opuesto al que correspondería si hubiera simetría.

La primera de las figuras 5.11 muestra un ejemplo de antisimetría respecto del plano 2-3. Por simplicidad, pensemos que se trata de un problema bidimensional. Esta antisimetría implica que si giramos  $180^\circ$  el sólido en torno al eje 2, veríamos el mismo problema, pero con todas las cargas y condiciones de contorno en sentidos opuestos a los del problema inicial. Al nuevo problema corresponden evidentemente desplazamientos y tensiones cuyo sentido es opuesto respecto del problema original (porqué?). Utilizaremos esta conclusión para simplificar el análisis.



**Figura 5.11.-** Ejemplo de problema antisimétrico, y condiciones de contorno a aplicar.

Consideremos dos puntos simétricos A y A'. El desplazamiento del punto A' en la perspectiva de la segunda figura 5.11 será opuesto al desplazamiento del punto A en la perspectiva de la primera figura, como se indica. Trazamos en la primera figura el desplazamiento de A' (que acabamos de calcular en la segunda figura en función del de A). Esta sencilla operación permite observar que:

$$u_1(x_1, x_2) = u_1(-x_1, x_2) \quad ; \quad u_2(x_1, x_2) = -u_2(-x_1, x_2)$$

Lo anterior implica que un punto en  $x_1=0$  puede tener movimiento horizontal  $u_1$  distinto de cero, pero su movimiento vertical debe ser nulo:

$$u_2(0, x_2) = 0$$

Razonando análogamente con las tensiones, trazamos en un punto de  $x_1$  positivo las componentes de tensión (primera figura). Si como antes observamos el sólido rotado  $180^\circ$ , se nos presenta un problema con todas las cargas, etc, cambiadas de sentido. En este problema (segunda figura), las tensiones serán iguales y de signo contrario que en el problema original. Girando nuevamente  $180^\circ$  la segunda figura revertimos al problema original, obteniendo con ello las tensiones en un punto en función de las del punto simétrico, como se representa en la primera figura. Observando el resultado es inmediato concluir que:

$$\sigma_{11}(x_1, x_2) = -\sigma_{11}(-x_1, x_2) \quad ; \quad \sigma_{22}(x_1, x_2) = -\sigma_{22}(-x_1, x_2) \quad ; \quad \sigma_{12}(x_1, x_2) = \sigma_{12}(-x_1, x_2)$$

Lo anterior implica que en un punto sobre el plano de simetría geométrica, las dos componentes de tensión normal,  $\sigma_{11}$  y  $\sigma_{22}$ , serán nulas. En cambio la componente de tensión tangencial  $\sigma_{12}$  puede ser distinta de cero. El interés aquí se reduce a obtener las

condiciones de contorno a aplicar en el plano de antisimetría cuando simplificamos el análisis tomando sólo medio sólido. En la nueva "superficie exterior", -el plano 23-, la componente  $\sigma_{11}$  debe ser nula. La componente  $\sigma_{12}$  no está condicionada. Resumiendo, los puntos del plano de antisimetría sólo se moverán perpendicularmente al plano, y la tensión normal en ese plano será nula. La tercera de las figuras 5.11 muestra la simbología utilizada habitualmente para representar este tipo de condiciones de contorno.

Notemos finalmente que la componente  $\sigma_{22}$  no se aprecia en el plano 23, por lo que no cabe incluir su valor entre las condiciones de contorno. Ello no obsta para que deba ser nula, como efectivamente obtendremos en el proceso de resolución, ya que las condiciones en el plano 23  $\sigma_{11}=0$ ,  $u_2=0$ , implican  $\sigma_{22}=0$  a través de la ley de comportamiento.

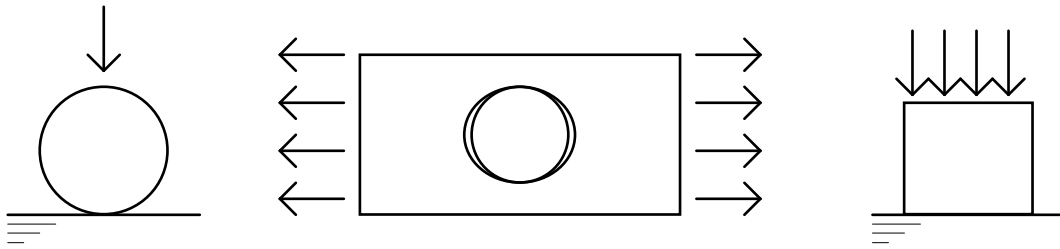
#### Contacto según la Ley de Coulomb.

Frecuentemente, un sólido tiene limitadas sus posibilidades de movimiento debido a la vecindad de otro sólido. En efecto, la experiencia común indica que dos sólidos no ocuparán el mismo espacio físico, y que si se aproximan mutuamente llegará a producirse *contacto* entre sus superficies, y no su interpenetración. La primera noción fundamental en el fenómeno de contacto es pues la de "zona de contacto", que es la superficie geoméricamente común a los contornos de ambos sólidos. Supongamos por simplicidad que todas las cargas aplicadas a los sólidos se hacen crecer simultáneamente. En este proceso de carga, la zona de contacto puede variar de tamaño. Según la forma de evolución de la zona de contacto, los problemas de contacto se clasifican en:

- *Contacto en avance.* Cuando nuevos puntos materiales de los sólidos se incorporan a la zona de contacto en el proceso de carga.
- *Contacto en retroceso.* Cuando puntos materiales de los sólidos abandonan la zona de contacto, sin que exista incorporación de nuevos puntos.
- *Contacto conforme.* Cuando no se incorporan ni salen de la zona de contacto puntos materiales de los sólidos durante el proceso de carga.

La figura 5.12 muestra ejemplos bidimensionales típicos de los tipos de contacto anteriores. Como ejemplo de problema en avance se muestra el contacto de un cilindro sobre una superficie horizontal. La zona de contacto crecerá al aumentar la carga vertical. Como ejemplo de retroceso tenemos el contacto de un cilindro rodeado de otro sólido, a cuyo agujero se ajusta perfectamente (sin huecos y sin compresión) cuando la carga es nula. Como ejemplo de contacto conforme se muestra el problema de una cara plana de un sólido sobre una superficie horizontal. La zona de contacto no varía al aumentar la carga, en este caso.



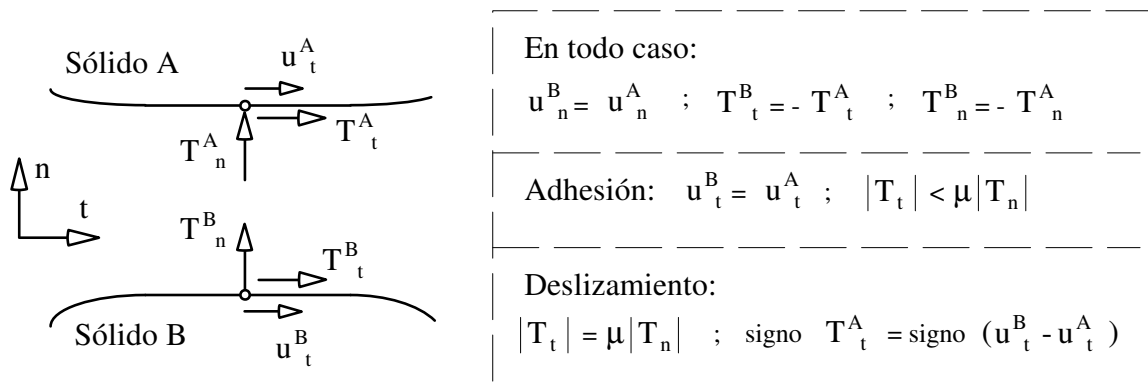


**Figuras 5.12.-** Ejemplos de tipos de problemas de contacto

La ley de fricción de Coulomb es un modelo sencillo y aceptable para representar los fenómenos elásticos asociados al contacto entre sólidos con superficies secas. Según esta ley, la tensión tangencial a las superficies en un punto tendrá, como máximo, el valor de la tensión normal de compresión, multiplicada por un coeficiente de rozamiento  $\mu$ , que depende del material, el acabado de las superficies, etc. Si en un punto de la zona de contacto la tensión tangencial no alcanza ese límite, los correspondientes dos puntos de ambos sólidos continuarán compartiendo la misma posición geométrica. Se dice que ambos puntos están en *estado de adhesión*. Si se llega al referido límite, puede producirse movimiento tangencial relativo entre los puntos materiales que estaban en contacto. Decimos entonces que esos puntos están en *estado de deslizamiento*. Adicionalmente se establece que la dirección de la tensión tangencial será, en cada sólido, opuesta al deslizamiento relativo entre los puntos inicialmente en contacto, cuando tal deslizamiento exista. Así pues, la zona de contacto puede estar subdividida en subzona(s) en estado de adhesión, y subzona(s) en estado de deslizamiento. Llamando  $\sigma$  la componente normal del vector tensión, y  $\tau$  a la componente tangencial, definidas en el epígrafe 2.1, la ley de Coulomb se puede expresar mediante:

$$\begin{aligned} \tau < \mu |\sigma| & \quad \text{Estado de adhesión.} \\ \tau = \mu |\sigma| & \quad \text{Estado de deslizamiento.} \\ & \quad \text{(tens. tangencial opuesta al desliz. relativo)} \\ \tau > \mu |\sigma| & \quad \text{Imposible.} \end{aligned}$$

Las condiciones de contorno a imponer en zonas de contacto se resumen en la figura 5.13. En ella se muestra un punto de cada sólido, inicialmente en mutuo contacto, aunque se dibujan separados por claridad. Se han notado las componentes de sus desplazamientos normales como  $u_n^A, u_n^B$ , según se trate del punto del sólido A o del B, y las componentes tangenciales como  $u_t^A, u_t^B$ , de acuerdo con los ejes tangencial y normal (t-n) dibujados. En hipótesis de pequeños desplazamientos, la suposición de que ambos puntos seguirán formando parte de la zona de contacto, conduce a que  $u_n^A = u_n^B$ , en todos los casos. Para el vector tensión en esos puntos se usa la notación  $\mathbf{T}^A, \mathbf{T}^B$ , según se trate del punto del sólido A o del B. En la figura se representan mediante sus componentes en los ejes t-n, es decir  $T_n^A, T_t^A$ , y  $T_n^B, T_t^B$ , dibujadas en sentido positivo. El equilibrio local exige en todos los casos que sea  $T_n^A = -T_n^B$  ;  $T_t^A = -T_t^B$ .



**Figuras 5.13.-** Condiciones de contorno posibles en un punto de la zona de contacto.

Cuando sea posible adoptar como aproximación que el coeficiente de fricción sea nulo, diremos que existe contacto sin fricción. Esta condición se produce por ejemplo cuando se considera impedido el movimiento normal a la superficie, y no el tangencial (como se mostró en la figura 5.5). Bajo esta hipótesis la tensión tangencial es nula, y habrá estado de deslizamiento en todos los puntos de la zona de contacto.

Respecto de los problemas elásticos más típicos, la resolución de un problema de contacto tiene la dificultad añadida de que es necesario encontrar el tamaño de la zona de contacto para el nivel de carga establecido, así como su partición en subzonas de adhesión y deslizamiento. En general esto no puede llevarse a cabo desacopladamente de la resolución en tensiones, desplazamientos, etc, del problema. Si además no se da la circunstancia supuesta al principio de que todas las cargas crecen a la vez desde cero, y el coeficiente de fricción no es nulo, la solución dependerá también de la historia de carga. Incluso con sólo alguna de las complicaciones mencionadas, la resolución analítica de un problema de contacto puede resultar muy compleja. El tratamiento específico de los problemas de contacto se sale de los propósitos de este texto. Puede consultarse al respecto el texto de Barber, capítulos 12 y 21. Un tratamiento mucho más extenso y detallado puede encontrarse en el libro de Gladwell, dedicado íntegramente a problemas de contacto.

Si el lector llega a tener necesidad en el futuro de analizar problemas de contacto, lo más probable es que se plantee utilizar para ello métodos numéricos aptos para ordenador, como el Método de los Elementos Finitos o el Método de los Elementos de Contorno (el cual presenta ventajas claras para problemas elásticos de contacto), en lugar de procedimientos analíticos. Para concluir este apartado, se resumirán algunas particularidades especiales de ciertos problemas, cuyo conocimiento será muy útil a la hora de diseñar una estrategia de solución basada en algún método numérico como los citados.

Problemas sin fricción:

La solución no depende de la historia de cargas.

Si hay avance, el tamaño de la zona de contacto depende del nivel de cargas.

Problemas con fricción:

La solución depende siempre de la historia de cargas.

Problemas con o sin fricción:

Si el contacto es conforme o en retroceso, y las cargas (y eventualmente los desplazamientos prescritos no nulos) crecen todas en la misma proporción desde cero, entonces el tamaño de la zona de contacto, así como el de las subzonas de adhesión y deslizamiento si hay fricción, es independiente del nivel de carga, suponiendo que se aplica al menos una fracción no nula de la misma.

Como se aprecia, la dependencia de la historia de cargas está asociada a la presencia de fricción, y es consecuencia de la irreversibilidad termodinámica implicada. La única excepción a lo anterior se tendría en el caso en que no se produjese deslizamiento en ningún momento de cada uno de los procesos de carga considerados.

La tercera propiedad de las enunciadas indica que, por ejemplo el caso de retroceso de la figura 5.12 presentará zonas de contacto cuyo tamaño será independiente del valor de la tracción lateral. Esto será así aunque pueda sorprender a primera vista. Piénsese que el comportamiento de cada sólido es lineal, y que si el estado de contacto de cada punto no cambia, el problema completo será lineal en el sentido de que a niveles de carga mayores corresponderán desplazamientos y tensiones proporcionalmente mayores (el multiplicar la tensión normal y tangencial por el mismo factor en un punto de la zona de contacto dejará a dicho punto en el mismo estado de adhesión o deslizamiento que tuviese). En los problemas conformes o de retroceso no es factible que un punto de la zona de contacto cambie de estado al aumentar el nivel de carga. Para darnos cuenta de ello basta apreciar que multiplicando todas las tensiones, desplazamientos (y consecuentemente los acercamientos y alejamientos relativos entre puntos), etc, por un mismo factor, se obtiene una solución sin incompatibilidades, ya que ningún punto de la zona de contacto sale de la misma ni cambia su estado, y ningún punto de zonas vecinas a la de contacto se incorporará al contacto (aquí es crucial que el problema sea de retroceso, para que entre puntos con posibilidad de contactar *sólo haya alejamientos*; nótese que lo anterior no puede decirse de la primera de las figuras 5.12). Por tanto, la solución elástica del problema a un nivel de carga será la misma que a otro nivel de carga, multiplicada por el factor correspondiente.

Respecto de esa tercera propiedad, se llama la atención sobre que la condición de que todas las cargas crezcan uniformemente desde cero excluye por ejemplo la presencia de un desplazamiento prescrito no nulo que no crezca desde cero con el resto de las cargas. Claramente también excluye la presencia de un sistema de cargas previo y distinto del que se pretende analizar.

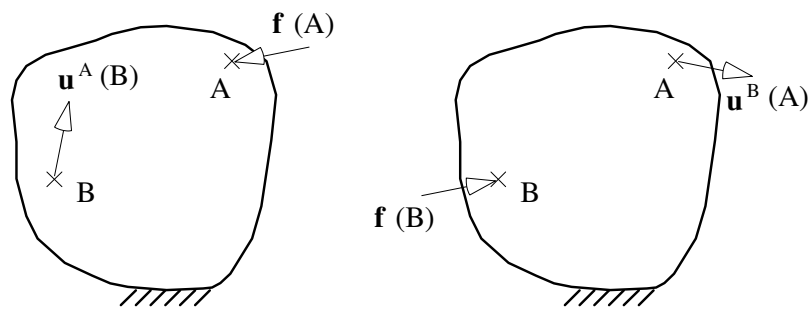
### 5.10.- Coeficientes de Influencia.

En ocasiones es útil conocer cómo están relacionados el desplazamiento en un punto B con una fuerza puntual aplicada en otro punto A del sólido. Bajo las condiciones de comportamiento elástico lineal que asumimos, y si las condiciones de contorno en desplazamiento son homogéneas (tipo  $u=0$ ), en ausencia de fuerzas de volumen dicha relación será lineal. Llamamos de modo genérico "*Coeficientes de Influencia*" a los coeficientes (constantes) de esa relación lineal entre fuerza y

desplazamiento, o también a los de las que relacionan sus proyecciones sobre alguna dirección especificada.

Llamaremos  $f_i(A)$  a las componentes de la fuerza que se aplique en el punto A, y  $u_i^A(P)$  a los desplazamientos en un cierto punto P debidos a esa fuerza aplicada en A, como indica la figura 5.14. Escribiremos la relación lineal entre componentes de fuerza y desplazamiento su forma general, para cada caso ilustrado en las figuras 5.14:

$$u_i^A(B) = C_{ij}^{BA} f_j(A) ; \quad u_i^B(A) = C_{ij}^{AB} f_j(B) \quad (5.11)$$



**Figuras 5.14.-** Desplazamientos de dos puntos para definir Coeficientes de Influencia.

Donde el primer superíndice de los coeficientes indica el punto cuyo desplazamiento se observa, y el segundo superíndice el punto de aplicación de la fuerza. La simple inspección de las ecuaciones anteriores permite asegurar que tanto  $C^{AB}$  como  $C^{BA}$  son tensores de orden dos. Supondremos que todas las condiciones de contorno en desplazamientos son homogéneas (desplazamientos nulos), y que las fuerzas de volumen son despreciables. La aplicación del segundo teorema de reciprocidad entre los dos estados de carga conduce a:

$$f_i(A) u_i^B(A) = f_i(B) u_i^A(B)$$

Que con (5.11) resulta:

$$f_i(A) C_{ij}^{AB} f_j(B) = f_i(B) C_{ij}^{BA} f_j(A) = f_j(B) C_{ji}^{BA} f_i(A)$$

En la última igualdad se ha hecho uso de que cualquier símbolo puede utilizarse como subíndice mudo. Como  $f(A)$  y  $f(B)$  son vectores que pueden tomar cualquier valor, será:

$$C_{ij}^{AB} = C_{ji}^{BA} \quad (5.12)$$

La ecuación anterior resume la característica principal de los tensores de coeficientes de influencia. Nótese que la misma no implica que ninguno de los dos tensores sea simétrico. Solamente en el caso en que se esté observando el desplazamiento en el mismo punto que se aplica la fuerza sucede que el tensor de coeficientes de influencia es simétrico. Por ejemplo, (5.12) implica la simetría de  $C^{AA}$ :

$$C_{ij}^{AA} = C_{ji}^{AA} \quad (5.13)$$

Alternativamente, también se denominan "coeficientes de influencia" los escalares que relacionan los módulos de las fuerzas con las proyecciones de los desplazamientos sobre las fuerzas (que son aplicadas en el punto donde se observa el desplazamiento, pero que corresponden a otro estado de carga). Esta definición es diferente de la del tensor de coeficientes de influencia, aunque guarda relación con ella, como veremos. Por ahora, y con el objeto de precisar la nueva definición, definimos el escalar  $u^B(A)$  como la proyección de  $\mathbf{u}^B(A)$  sobre  $\mathbf{f}(A)$ , siempre con referencia a la figura 5.14. Nótese que el desplazamiento y la fuerza anteriores corresponden a estados de carga distintos. Los nuevos coeficientes de influencia escalares son definidos mediante:

$$u^A(B) = C^{BA} f(A) \quad ; \quad u^B(A) = C^{AB} f(B) \tag{5.14}$$

Siendo  $f(A)$  el módulo de la fuerza  $\mathbf{f}(A)$ , y análogamente para  $f(B)$ . Para encontrar la relación entre estos coeficientes,  $C^{AB}$ ,  $C^{BA}$ , y los términos de los tensores de coeficientes de influencia, multiplicamos escalarmente la segunda igualdad (5.11) por un vector unitario en la dirección y sentido de  $\mathbf{f}(A)$ , que llamaremos  $\mathbf{n}^A$ :

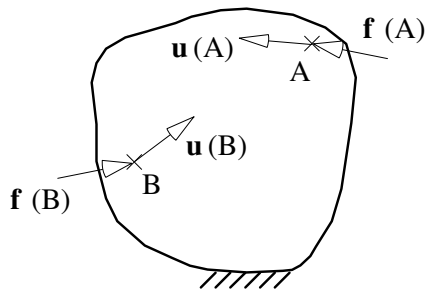
$$u_i^B(A) = C_{ij}^{AB} f_j(B) \quad \Rightarrow \quad n_i^A u_i^B(A) = n_i^A C_{ij}^{AB} f_j(B)$$

El primer miembro es  $u^B(A)$ . En el segundo miembro utilizamos la identidad  $\mathbf{f}(B) = f(B)\mathbf{n}(B)$ . Así:

$$u^B(A) = C_{ij}^{AB} n_i^A n_j^B f(B)$$

Identificando términos entre la ecuación anterior y la segunda de (5.14) tenemos:

$$C^{AB} = C_{ij}^{AB} n_i^A n_j^B \quad ; \quad \text{y análogamente: } C^{BA} = C_{ij}^{BA} n_i^B n_j^A \tag{5.15}$$



$$u_i(A) = u_i^A(A) + u_i^B(A) = C_{ij}^{AA} f_j(A) + C_{ij}^{AB} f_j(B)$$

$$u_i(B) = u_i^A(B) + u_i^B(B) = C_{ij}^{BA} f_j(A) + C_{ij}^{BB} f_j(B)$$

**Figura 5.15.-** Movimientos cuando actúan fuerzas en A y en B.

Las relaciones anteriores determinan el valor de los coeficientes de influencia escalares en función de las componentes de los tensores de coeficientes de influencia. Si en la última de las ecuaciones anteriores intercambiamos los subíndices mudos y hacemos uso de (5.12), resulta:

$$C^{BA} = C_{ji}^{BA} n_j^B n_i^A = C_{ij}^{AB} n_j^B n_i^A$$

Que en virtud de la primera ecuación (5.15) es precisamente  $C^{AB}$ . Por tanto, entre los coeficientes de influencia (escalares) se cumple la relación:

$$C^{AB} = C^{BA} \quad (5.16)$$

Los coeficientes de influencia también permiten calcular el desplazamiento de los puntos cuando actúan fuerzas en más de un punto. Solo hay que emplear el principio de superposición de efectos. Así, los desplazamientos de A y B cuando actúan simultáneamente fuerzas en ambos puntos, pueden calcularse como se indica en la figura 5.15. Vamos a escribir una expresión matricial que englobe las dos relaciones anteriores (para un caso bidimensional, por simplicidad). Para ello definimos una matriz columna  $\mathbf{u}$  que contenga en sus dos primeros términos las dos componentes de  $\mathbf{u}(A)$ , y en los otros dos las de  $\mathbf{u}(B)$ ; análogamente definimos una matriz columna  $\mathbf{f}$  que contenga a  $\mathbf{f}(A)$  y a  $\mathbf{f}(B)$ , y una matriz cuadrada  $\mathbf{C}$ , de dimensiones  $4 \times 4$  en este caso, que contenga a las submatrices ( $2 \times 2$ )  $C^{AA}$ ,  $C^{AB}$ , etc. Podemos escribir:

$$\begin{bmatrix} u_1(A) \\ u_2(A) \\ u_1(B) \\ u_2(B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{AA} & C_{12}^{AA} & C_{11}^{AB} & C_{12}^{AB} \\ C_{21}^{AA} & C_{22}^{AA} & C_{21}^{AB} & C_{22}^{AB} \\ C_{11}^{BA} & C_{12}^{BA} & C_{11}^{BB} & C_{12}^{BB} \\ C_{21}^{BA} & C_{22}^{BA} & C_{21}^{BB} & C_{22}^{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(A) \\ f_2(A) \\ f_1(B) \\ f_2(B) \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \mathbf{u}(A) \\ \mathbf{u}(B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{AA} & C^{AB} \\ C^{BA} & C^{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}(A) \\ \mathbf{f}(B) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{f}$$

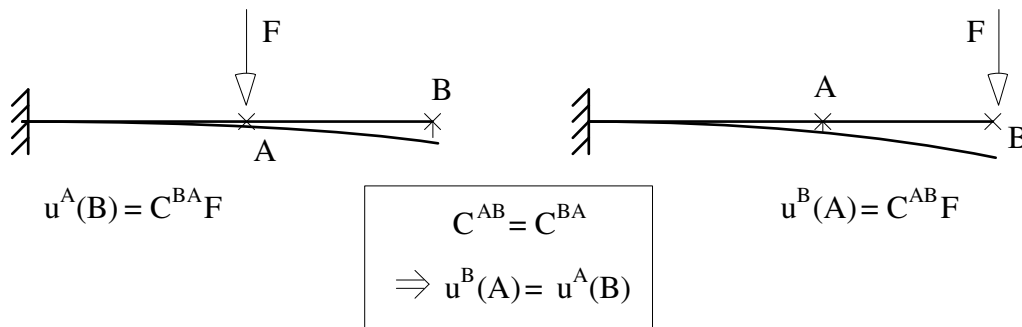
Como (5.12) expresa que  $C^{AB}$  es la traspuesta de  $C^{BA}$ , y (5.13) indica que  $C^{AA}$  y  $C^{BB}$  son simétricas, resulta que la matriz de coeficientes de influencia  $\mathbf{C}$  que hemos definido, es simétrica. Aunque se ha considerado un problema bidimensional por simplicidad, el razonamiento es evidentemente aplicable a casos tridimensionales. La única diferencia es que las submatrices serán ( $3 \times 1$ ) o ( $3 \times 3$ ), manteniéndose la conclusión de que la matriz  $\mathbf{C}$  es simétrica. Por otra parte, pueden incluirse más de dos puntos (en los que aplicar fuerza y observar desplazamiento) en el desarrollo anterior. El razonamiento de superposición de efectos conduce en este caso a una matriz  $\mathbf{C}$  de ( $N \times N$ ) submatrices, siendo  $N$  el número de puntos elegidos en el sólido. Cuanto mayor sea el número de puntos elegidos, conseguiremos una mejor descripción del comportamiento elástico del sólido. Esta descripción podrá utilizarse como aproximación en aplicaciones prácticas. Tendremos ocasión de apreciar algunas características comunes entre el procedimiento de aproximación sugerido y la técnica de aproximación por Elementos Finitos, presentada en un capítulo posterior. El coste de disponer de una información más precisa acerca del comportamiento del sólido es, en todo caso, el cálculo -y manejo- de matrices de coeficientes mayor tamaño.

Hemos definido la matriz global de coeficientes de influencia anterior,  $\mathbf{C}$ , en base a las componentes de los tensores de coeficientes de influencia. Es también posible emplear un enfoque basado en los coeficientes de influencia escalares. Como ventaja, tendremos un escalar donde antes teníamos una submatriz, con la consiguiente economía operativa. La desventaja es que la información contenida se limita a la proyección de los desplazamientos sobre la dirección de las fuerzas (notados como,  $u(A)$ , etc), no apareciendo los vectores desplazamiento como tales. Por otra parte, este enfoque sólo es útil si la fuerza en cada punto va a mantener su dirección en todos los casos a analizar. Con este enfoque basado en coeficientes de influencia escalares, tenemos:

$$\begin{bmatrix} u(A) \\ u(B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^A(A) + u^B(A) \\ u^A(B) + u^B(B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{AA} & C^{AB} \\ C^{BA} & C^{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(A) \\ f(B) \end{bmatrix}; \quad u' = C'f$$

Tanto la matriz global  $C'$  definida en la última igualdad, como  $u'$  y  $f'$ , son evidentemente distintas de las definidas en base a los tensores de coeficientes de influencia. De la ecuación (5.16) se sigue que la nueva matriz  $C'$  es también simétrica.

Para finalizar, apuntaremos que basándose en las propiedades de los coeficientes de influencia pueden encontrarse relaciones, que a primera vista pueden resultar sorprendentes, entre los desplazamientos de los puntos de un sólido bajo distintos estados de carga. Un ejemplo clásico se muestra en la figura 5.16. Se trata de una viga con uno de sus extremos empotrado (con desplazamientos y giro impedidos), a la que se aplica perpendicularmente una fuerza de magnitud  $F$  en dos posiciones distintas.



**Figura 5.16.-** Ejemplo de aplicación de propiedades de los coeficientes de influencia.

La conclusión es, en este caso, que el movimiento vertical del punto B en la figura izquierda debe ser igual que el de A en la figura derecha. Por supuesto, esta misma conclusión se alcanza aplicando directamente el segundo teorema de reciprocidad entre los dos estados de carga.

**Bibliografía:**

FUNG, Y.C., "Foundations of solid mechanics", Prentice-Hall  
 BARBER, J.R., "Elasticity", Kluwer Academic Publishers  
 GLADWELL, G.M.L. "Contact problems in the classical theory of elasticity",  
 Sijthoof & Noordhoff International Publishers  
 PARIS, F., "Teoría de la Elasticidad", ETSII-Univ. Sevilla  
 DOBLARE, M., "Teoría de la Elasticidad lineal", ETSII-Univ. Zaragoza  
 REISMANN, H., & PAWLIK, P., "Elasticity", Wiley - Interscience