

# Capítulo 4

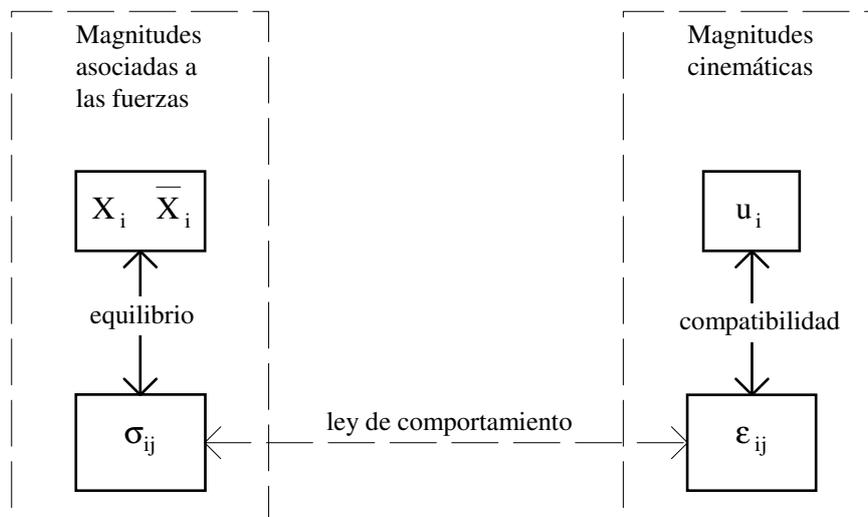
## Ley de Comportamiento.

(“alla breve”)

Sólidos con la misma geometría y sustentación sometidos a idénticas cargas se deformarán de manera diferente si son de materiales distintos. La ley de comportamiento recoge el conjunto de propiedades específicamente asociadas al material, al margen de la forma del sólido, su sustentación, etc. En este capítulo se presentan algunas leyes sencillas de comportamiento, especialmente de tipo elástico lineal, extensamente utilizadas en las aplicaciones más comunes.

### 4.1.- Introducción.

En los dos capítulos anteriores se establecen las relaciones entre las cargas aplicadas y las tensiones por una parte, y entre los desplazamientos y las deformaciones por otra parte. Por tanto, en este momento tenemos un bloque de magnitudes cinemáticas relacionadas entre sí (en la que se incluyen los desplazamientos y los diversos tensores que representan la deformación), y un bloque de magnitudes asociadas a las fuerzas (cargas de contorno y de dominio, y tensor de tensiones) también relacionadas entre sí. Para completar el modelo matemático necesitamos disponer de alguna relación entre magnitudes del bloque cinemático y del bloque de fuerzas.



**Figura 4.1.-** Magnitudes del modelo matemático para pequeñas deformaciones.

A la hora de plantear esa relación, encontraremos claras ventajas en la utilización de las magnitudes definidas a nivel local en el interior del sólido, es decir las tensiones y las deformaciones. La razón es que usando tales magnitudes la relación no dependerá de la geometría del sólido, la localización de las cargas, etc., y dependerá solamente de las características locales del material, como pretendemos. La figura 4.1 muestra esquemáticamente las relaciones básicas del modelo matemático para el caso de pequeñas deformaciones y desplazamientos. La ley de comportamiento será en este caso una relación entre el tensor de tensiones y el tensor de pequeñas deformaciones de Cauchy.

Si tenemos un problema de grandes deformaciones y desplazamientos, las ecuaciones de equilibrio, y por tanto el tensor de tensiones, están referidas al estado deformado (insistimos en que es el único estado que realmente existe, y por tanto en el que ha de plantearse el equilibrio). Un tensor de tensiones referido al estado deformado es pues un concepto físico natural, pero en mecánica de sólidos es habitual emplear una descripción lagrangiana de la deformación. Como hemos de relacionar tensiones con deformaciones, es conveniente utilizar tensores de tensión definidos también respecto de la configuración indeformada, aunque sus componentes dependan de las tensiones reales de la configuración deformada (los tensores de tensión habitualmente utilizados para estos fines se conocen como primer y segundo tensor de Piola-Kirchoff). Lo anterior sólo pretende indicar al lector que en problemas más generales se utilizan posibilidades distintas de la que aparece en la figura 4.1 en cuanto a la elección de magnitudes locales para plantear la ley de comportamiento.

El conocimiento de cómo y cuánto se deforma el material en función de las tensiones que soporta a nivel local es la información básica asociada a lo que denominamos ley de comportamiento. Es evidente que este conocimiento sólo puede adquirirse mediante experimentación. La evidencia experimental revela precisamente una gran variedad y complejidad de comportamientos en los materiales reales. Para establecer un modelo matemático del tipo al indicado en la figura 4.1, es necesario plantear la ley de comportamiento como una relación matemática, siendo deseable que ésta sea además lo más sencilla posible. El conjugar esta sencillez con una suficiente exactitud obliga normalmente a tomar en consideración sólo aquellos aspectos del comportamiento del material que tengan mayor relevancia en el rango de condiciones de servicio (temperatura, humedad, deformaciones, cargas, ...). Por ejemplo, el análisis de una pieza de goma necesitará en general considerar grandes deformaciones y desplazamientos, posibles no linealidades, y quizá introducir la variable tiempo. Pero si la temperatura de servicio es de, digamos,  $-140^{\circ}\text{C}$ , el comportamiento puede variar tanto que una simple ley lineal de pequeñas deformaciones sea suficiente hasta llegar a la rotura. Por tanto, nunca debemos considerar que una ley de comportamiento dada por una expresión matemática relativamente simple es exactamente representativa del comportamiento de ningún material, sino que debemos pensar en ella como el resultado de una aproximación a un comportamiento observado experimentalmente.

La ley de comportamiento es la parte del modelo matemático de la Teoría de la Elasticidad más sujeta a errores. De ella, y de lo ajustado de las simplificaciones que se asuman, depende la exactitud de cualquier solución obtenida a partir de dicho modelo.

#### 4.2.- Noción de comportamiento elástico, viscoelástico, y plástico.

A partir de este epígrafe se asumirá sistemáticamente comportamiento lineal elástico del material. Por útil que este comportamiento sea, debemos tener noticia de que no es éste el único comportamiento que encontraremos en la práctica. En este epígrafe se describen muy sucintamente y a título informativo los tipos de comportamiento más relevantes en mecánica de sólidos.

##### Comportamiento elástico.

Si apreciamos una relación biunívoca entre el tensor de tensiones y el de deformaciones, diremos que existe comportamiento elástico. Esa correspondencia biunívoca es en realidad una condición más exigente que el enunciado de “elasticidad” dado en la hipótesis cuarta del epígrafe 1.2, dado que implica la recuperación de la deformación para todos los estados intermedios de carga, y no solo para el inicial y el final. A efectos del modelo matemático, se suele entender por comportamiento elástico esta condición más exigente, aunque por el contrario se suele entender por comportamiento no elástico el que no se ajusta a la definición de 1.2. En lo sucesivo distinguiremos entre ambas definiciones cuando sea necesario. Si el comportamiento además de elástico es localmente lineal según la definición de 1.2, entonces la ley de comportamiento será una relación lineal (en el sentido usual de ecuaciones algebraicas lineales) entre las componentes de tensión y de deformación. Podemos escribir la relación lineal más general posible como:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4.1)$$

En donde los coeficientes  $C_{ijkl}$  son constantes, y forman un tensor de cuarto orden, de acuerdo con la regla del cociente. Se ha asumido por concisión que el estado inicial de deformaciones nulas está exento de tensiones. De no ser así, se añadiría un término de “tensión residual”  $\sigma_{ij}^0$  al miembro derecho de la ecuación, quedando  $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \sigma_{ij}^0$ . Si el problema presenta deformaciones no nulas para tensiones nulas, procede usar  $\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^0)$ , donde  $\varepsilon_{kl}^0$  representa la deformación inicial. Desde el punto de vista del modelo matemático, la existencia de tensiones con deformación nula (o viceversa), no supone complicaciones especiales, ni afecta al valor de las componentes  $C_{ijkl}$ .

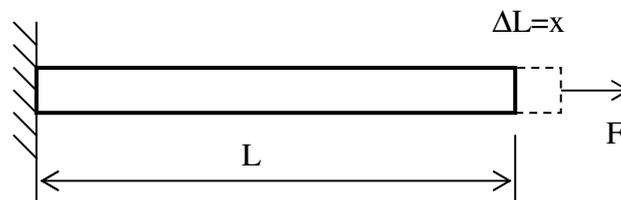
No existe ningún motivo especial para expresar la ley de comportamiento como tensiones en función de deformaciones. Es igualmente posible expresarla como deformaciones en función de tensiones mediante una ecuación del tipo  $\varepsilon_{ij} = J_{ijkl} \sigma_{kl}$ . Los coeficientes  $J_{ijkl}$  podrán calcularse en función de los  $C_{ijkl}$  y viceversa.

La modelización de un material en el que se aprecia comportamiento elástico aunque no lineal, se realiza habitualmente mediante una ecuación como la (4.1), pero en la que los coeficientes  $C_{ijkl}$  no son constantes, sino que dependen adecuadamente de los términos del tensor de deformaciones o bien del de tensiones. El que pueda asumirse con buena aproximación comportamiento elástico del material, suele suponer una simplificación importante en cuanto a la manejabilidad del modelo matemático (con mayor motivo si además puede suponerse lineal). Se habla de comportamiento plástico

cuando no es elástico según la definición dada en 1.2, es decir cuando el sólido no recupera su forma inicial tras la descarga. Se asocia la deformación remanente tras la descarga al concepto de “deformación plástica”.

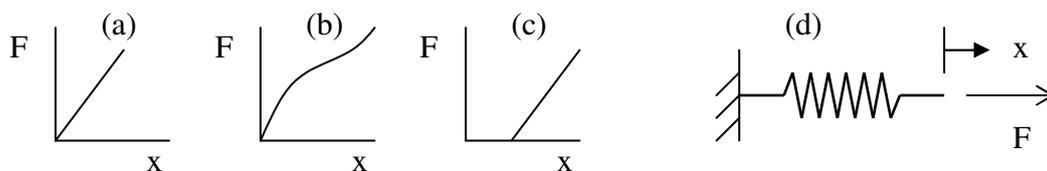
El que se pueda asumir comportamiento elástico no depende sólo del material, sino que también depende del nivel de sollicitación del mismo, y del tipo de problema. Así, si el nivel de sollicitación es muy pequeño (el material está muy lejos de romperse), y las cargas son de tipo estático, muchos materiales usuales pueden considerarse elásticos, entre ellos los aceros y la mayoría de las aleaciones férricas y no férricas, las maderas, las gomas y cauchos, los vidrios, y muchas resinas y otros materiales sintéticos. Sin embargo, a niveles de carga estática más elevados muchos de estos materiales dejan de presentar comportamiento elástico. También el que el problema sea de cargas cíclicas o repetitivas puede hacer que las deformaciones plásticas no sean ya despreciables, debido a efectos acumulativos que pueden producirse.

Para ilustrar los diversos modelos, analizaremos el comportamiento que implican en un estado de tensión unidireccional. Tal estado unidireccional puede conseguirse muy aproximadamente en la práctica en una barra esbelta recta del material, sometiéndola a tracción tirando de sus extremos mediante mordazas u otros dispositivos. Esta disposición, esquematizada en la figura 4.2, se conoce como "ensayo de tracción", y es ampliamente utilizada en la caracterización de materiales. Por ahora sólo pretendemos ilustrar como se comportaría un material en ese ensayo si obedeciese exactamente determinada ley idealizada.



**Figura 4.2.-** Esquema del ensayo de tracción.

El comportamiento elástico implicaría gráficas de fuerza  $F$  frente a alargamiento  $x$  del tipo a las mostradas en las figuras 4.3: (a) elástico lineal, (b) elástico no lineal, y (c) elástico lineal con deformaciones iniciales. En todos los casos, se puede representar esquemáticamente a la barra mediante un resorte, ya sea lineal o no lineal (d).



**Figuras 4.3.-** Algunos casos de comportamiento elástico unidireccional.

Comportamiento viscoelástico.

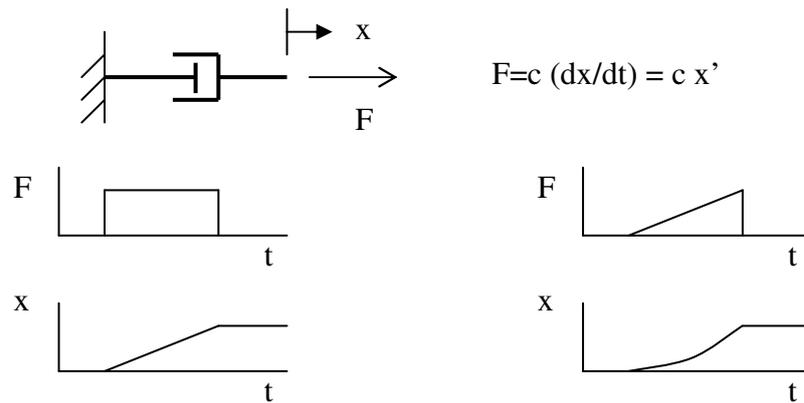
En ciertos problemas, la inclusión de la variable tiempo en el análisis no puede evitarse, aunque los efectos dinámicos (fuerzas de inercia) sean despreciables. Por ejemplo, si el material tiene respuesta lenta (tarda horas, semanas o meses en estabilizar sus deformaciones frente a las cargas aplicadas), y las condiciones de carga cambian antes de que la deformación se estabilice, entonces toda la historia de carga influye en el estado del sólido en un instante de observación dado. Para modelar este tipo de respuesta, se emplean modelos con resistencias de tipo viscoso (fuerzas proporcionales a la velocidad), que se oponen momentáneamente a la deformación pero que alcanzan asintóticamente una configuración deformada estable en el tiempo. La inclusión de estas resistencias de tipo viscoso es precisamente la característica principal de los modelos viscoelásticos.

En general, estos modelos viscoelásticos ofrecen comportamiento elástico según la definición de 1.2, ya que la forma inicial acaba por recuperarse en ausencia de cargas. En cambio, no es en rigor elástico según la definición dada en este epígrafe 4.2, ya que las deformaciones no dependen solamente de las tensiones en el instante de observación, sino también de la historia de carga. No obstante, puede entenderse que sí es elástico en el sentido de que a una misma historia de tensiones corresponde una deformación determinada.

En todo caso, los modelos viscoelásticos conducen a leyes de comportamiento lineales, ya que el multiplicar todas las acciones de la *historia* de carga por dos produce deformaciones de valor doble en el instante de observación.

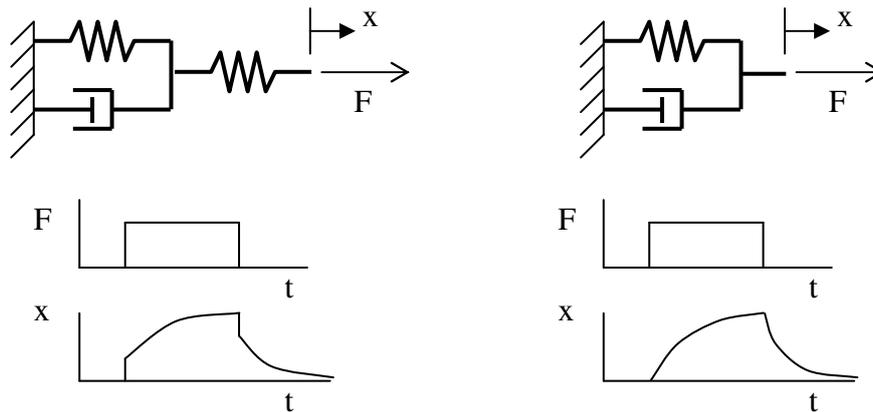
Los modelos viscoelásticos se utilizan también en problemas de cargas cíclicas en los que es preciso modelar la disipación interna de energía del material en el proceso de deformación repetitiva. Ocurre que la disipación de energía no está asociada necesariamente a deformaciones que permanezcan una vez que se descarga el sólido, y en estos casos son particularmente adecuados los modelos *elásticos* de viscoelasticidad. Además, la eventual inclusión de efectos dinámicos puede considerarse un problema menor una vez que hemos introducido la variable tiempo en el análisis, por lo que es típica la aplicación de modelos viscoelásticos también a problemas de vibraciones mecánicas.

Para ilustrar el comportamiento unidireccional de un material viscoelástico nos apoyaremos en el usual amortiguador viscoso representado en la Figura 4.4. La ecuación de comportamiento de este elemento aislado, así como su respuesta en el tiempo frente a una fuerza  $F$  de distintas evoluciones se muestra en la misma figura.



**Figura 4.4.-** Respuesta del amortiguador viscoso.

Mediante combinaciones de resortes lineales y amortiguadores viscosos se consigue reproducir una gran variedad de comportamientos. La figura 4.5 muestra dos ejemplos típicos. Para la elección del modelo, y del valor de los parámetros de rigidez y amortiguamiento, se sigue un criterio de “mejor ajuste” al comportamiento observado experimentalmente en el material.



**Figura 4.5.-** Dos modelos viscoelásticos unidireccionales.

Los ejemplos unidireccionales anteriores son suficientes para ofrecer una idea intuitiva del comportamiento viscoelástico, pero su generalización al caso tridimensional no es inmediata, máxime cuando se pretende conseguir un modelo que englobe cualquier posible casuística de amortiguamiento e historia de carga. El lector interesado puede consultar al respecto las dos primeras referencias que figuran al final del capítulo. En particular, puede profundizar en el modelo llamado “sólido lineal con memoria”, debido a Boltzmann. Su postulado básico es que, a nivel elemental, un incremento diferencial de tensión aplicado en el instante  $\tau$  ( $d\sigma_{ij}(\tau)$ ) producirá en un momento posterior  $t$  un incremento diferencial de deformación ( $d\varepsilon_{ij}(t)$ ), que será proporcional al diferencial de tensión y a una cierta función del lapso de tiempo ( $J_{ijkl}(t-\tau)$ ), la cual es característica del material. De este modelo puede obtenerse como caso particular cualquier comportamiento viscoelástico, y es capaz también de describir otros tipos de comportamiento.

### Comportamiento plástico.

En el contexto que nos ocupa, debe entenderse que hay comportamiento plástico del material si el mismo presenta deformaciones permanentes tras la descarga. De acuerdo con lo observado experimentalmente en muchos materiales de interés, los modelos de comportamiento plástico suelen admitir que el comportamiento es elástico (y frecuentemente lineal, aunque no necesariamente) cuando el estado de tensión-deformación es "poco exigente" para el material, y asumen un comportamiento del tipo resistencia viscosa (pero cuyas deformaciones no se recuperan) cuando la sollicitación es "muy exigente" para el material en cuestión.

Para cuantificar si el estado de tensión-deformación es o no "muy exigente", es decir, para delimitar el límite de comportamiento elástico del material, se utilizan teorías llamadas Criterios de Plastificación. No hay un criterio absolutamente válido para todos los materiales, sino que existen varios de estos criterios, que la experimentación ha refrendado como suficientemente aproximados para unos u otros materiales. En un epígrafe posterior se expondrán algunos criterios válidos para el acero dúctil y otros metales.

El comportamiento de tipo viscoso asumido para altas sollicitaciones del material requiere implícitamente la consideración de la evolución temporal de la deformación. Se habla de viscoplasticidad cuando es de interés el describir la evolución en el tiempo de la respuesta del sólido. Los modelos de viscoplasticidad son de aplicación, entre otros materiales, a los aceros normalmente utilizados en estructuras metálicas y órganos de máquinas, y a otras aleaciones metálicas.

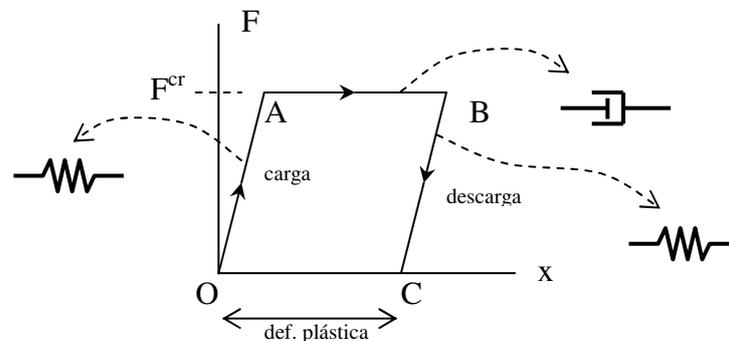
Como en todos los modelos de resistencia viscosa, se tiende al estado de equilibrio de la estructura (si existe) de forma asintótica, y por lo tanto en un tiempo teóricamente infinito. Pero en la práctica es frecuente que tras un tiempo relativamente breve las deformaciones hayan evolucionado casi totalmente. Lo habitual en estos casos es que no se necesite conocer la evolución en el tiempo. En resumen, es frecuente considerar que la configuración de equilibrio se alcanza instantáneamente, como en un análisis estático. Cuando se prescinde así de la variable tiempo, se habla simplemente de "plasticidad" en lugar de viscoplasticidad.

Seguidamente mostraremos el comportamiento según distintos modelos de plasticidad en el estado unidireccional de tensión de la figura 4.2 que se viene considerando como ejemplo.

La figura 4.6 muestra un ciclo de carga y descarga según el modelo unidireccional de plasticidad más sencillo posible, que se suele identificar como comportamiento plástico ideal (también elastoplástico ideal). Como ya se apuntó, muchos materiales de interés no presentan deformaciones plásticas hasta que el estado de sollicitación alcanza un determinado nivel. Por ello, en el caso unidireccional que nos ocupa existe un valor crítico de la fuerza,  $F^{cr}$ , por debajo del cual el comportamiento es elástico y lineal. Cualquier proceso de carga y descarga con  $F < F^{cr}$ , implicaría estados intermedios contenidos en la recta OA, volviéndose al punto O tras la descarga. El comportamiento en este tramo es análogo al de un resorte lineal, como se indica.

Cuando la fuerza llega y se mantiene en su valor crítico,  $F^{cr}$ , se sigue el tramo horizontal AB de la gráfica. Sus puntos representan los diversos estados de la barra según avanza el tiempo. Este fenómeno, que como se aprecia implica que el alargamiento crece sin que la fuerza lo haga, se observa en muchos materiales reales y se denomina “fluencia”. El comportamiento de la barra en este tramo es semejante al que presentaría un amortiguador viscoso, como sugiere la figura.

Si llegado un instante dado (cuando se alcanza el punto B), la carga  $F$  comienza a decrecer, el proceso de descarga tiene lugar según la recta BC, que es paralela a la inicial de carga (OA). El punto C indica el estado tras la descarga, por lo que la barra quedaría con la deformación remanente (“plástica”) indicada por este punto. En el tramo BC de descarga, la barra vuelve a comportarse como un resorte lineal de la misma rigidez, pero cuya longitud natural fuese la inicial de la barra mas la distancia OC. Un eventual nuevo proceso de carga comenzaría desde C, y recorrería el segmento CB.

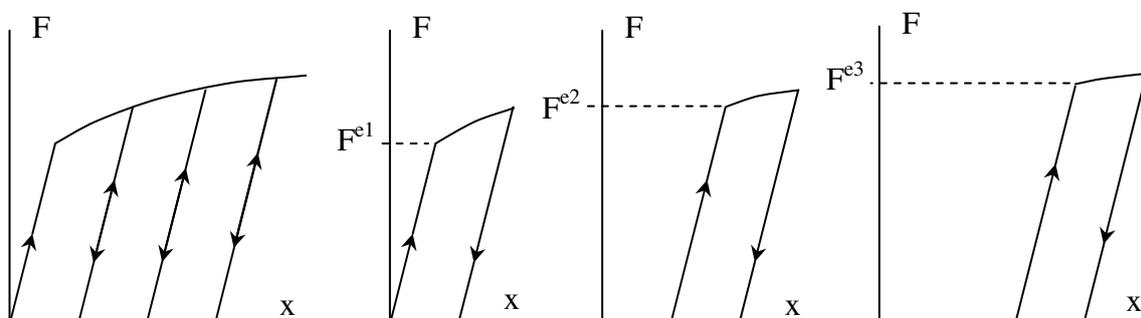


**Figura 4.6.-** Modelo unidireccional de “comportamiento plástico ideal”.

En el proceso ilustrado, la carga se estabiliza en el valor crítico ( $F^{cr}$ ), aunque un modelo de viscoplasticidad admitiría perfectamente superar este valor. Pero en este tipo de modelo (plástico) en el que se obvia la variable tiempo, se suele asumir que la carga no supera el valor crítico, porque en situaciones reales las zonas de la estructura que aún no han plastificado soportan los incrementos de carga adicionales, manteniendo las zonas plastificadas a valor crítico de tensión.

Existen otros modelos de comportamiento plástico que describen más aproximadamente el comportamiento de muchos materiales. Se trata de los modelos de plasticidad "con endurecimiento por deformación". El comportamiento implicado en estos modelos para el caso unidireccional es del tipo al mostrado en la figura 4.7. Nótese la ausencia de tramos horizontales. El término "endurecimiento" proviene del aumento aparente del límite elástico (carga  $F^e$  la que se puede llegar con comportamiento elástico) en sucesivos procesos de carga y descarga que lleguen a producir deformación plástica. El cómo se produce este aumento aparente del límite elástico se ilustra en la misma figura 4.7: las tres últimas figuras representan el resultado de tres ciclos sucesivos de carga y descarga, realizados de forma que cada uno de ellos produzca nuevas deformaciones plásticas. Como se aprecia, en la segunda carga es preciso llegar a una carga  $F$  de valor  $F^{e2}$  (mayor que  $F^{e1}$ ) para comenzar a producir deformaciones plásticas. Análogamente, en la tercera carga es preciso superar el valor  $F^{e3}$ , mayor que

$F_e^2$ ,  $F_e^2$  y  $F_e^3$  coinciden respectivamente con el valor máximo alcanzado en el ciclo de carga primero y segundo. Por tanto, la línea curva superior de la primera figura puede recorrerse tanto sin descargas como siguiendo sucesivos ciclos de carga y descarga.



**Figuras 4.7.-** Comportamiento plástico con endurecimiento: aumento del límite elástico  $F_e$  ante cargas y descargas sucesivas.

La generalización del comportamiento plástico unidireccional al caso tridimensional general requiere como primer paso la generalización de la fuerza crítica  $F_{cr}$ , a la que corresponde el concepto de "superficie de plastificación", concepto que se expone en un epígrafe posterior de este tema. Ésta es una superficie en un espacio de tensiones que delimita el fin del comportamiento elástico, existiendo varios modelos o teorías acerca de la forma de la misma, y acerca de la manera en que ésta puede variar durante un proceso de carga (de modo análogo a como varía el límite elástico en el ensayo de tracción, figura 4.7). Adicionalmente existen varios modelos o teorías acerca de cómo se producen los aumentos de deformación plástica, normalmente utilizando argumentos basados en la superficie de plastificación adoptada. Todo ello supone aún mayor complicación que, por ejemplo, la generalización del comportamiento viscoelástico, excediendo también los propósitos de esta breve exposición.

La información presentada en los párrafos anteriores acerca de los comportamientos viscoelástico, viscoplástico y plástico, es apenas introductoria, pero su conocimiento será suficiente para que el lector pueda comprender las precauciones con las que debe ser empleado el comportamiento lineal elástico, el cual será asumido en el resto del texto.

Por ejemplo, es patente que cualquier análisis en el que no aparezca la variable tiempo deberá implicar aplicaciones lentas de las cargas, no sólo para evitar efectos dinámicos (ver 1.2, "hipótesis básicas") sino también para que se establezcan los efectos viscoelásticos, que actúan en una escala de tiempo mucho más dilatada, y que siempre existirán en mayor o menor medida.

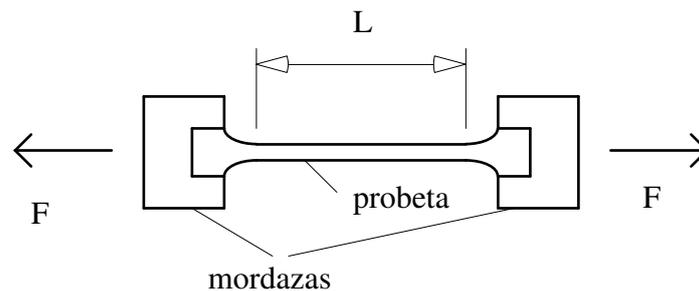
### 4.3.- Ensayo de tracción típico para un acero.

El material en el que resulta más típica la aplicación del modelo de comportamiento elástico lineal, es el acero. Ocurre además que desde el punto de vista macroscópico, el

acero es muy aproximadamente homogéneo e isótropo. Puede considerarse una circunstancia afortunada que un material de uso tan extendido en todo tipo de aplicaciones industriales se ajuste, en un nivel razonable de solicitaciones, a un comportamiento tan relativamente simple.

El análisis elástico lineal se aplica a otros muchos materiales, en unos casos con buena precisión, y en otros a sabiendas de que el material no obedece exactamente ese comportamiento, para conseguir una primera aproximación, o una solución orientativa.

El valor de los coeficientes de la ecuación 4.1 debe ser obtenido mediante experimentación. El ensayo de tracción que se describe a continuación es sencillo de realizar, y además es suficiente para obtener toda la información relevante si el material es isótropo, por lo que es ampliamente utilizado. Su configuración básica fue presentada anteriormente (figura 4.2), y se reproduce con algún detalle adicional en la figura 4.8. Básicamente el ensayo consiste en someter lentamente a tracción una barra esbelta del material, hasta romperla. La configuración del ensayo pretende conseguir que la tensión sea uniforme en la sección de la barra con la mayor aproximación posible. La forma de la probeta, que se muestra aproximadamente en la figura 4.8, permite que la hipótesis de tensión uniforme sea plenamente asumible en la longitud  $L$  en que la sección es constante.

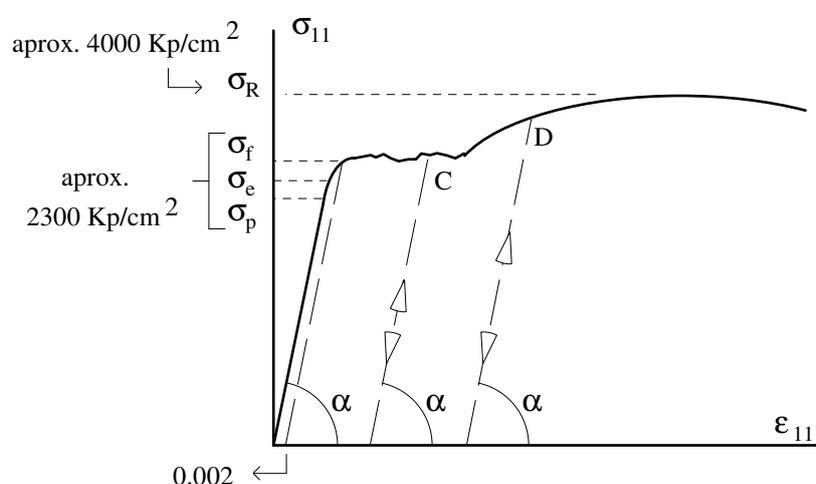


**Figura 4.8.-** El ensayo de tracción.

La uniformidad de tensiones en todos los puntos de la barra, implica también la de deformaciones, ya que el comportamiento es elástico en el sentido del epígrafe 4.2. La tensión tendrá sólo componente normal en las secciones transversales de la barra, y será igual a la fuerza  $F$  de tracción en la barra dividida por el área de la sección. Una dirección principal será el eje de la barra, con el que haremos coincidir la dirección  $x_1$ . Además, cualquier dirección perpendicular al eje de la barra será también dirección principal (nótese que el círculo de Mohr de familia 1 de  $n_1=0$  se reduce a un punto). Debido a la uniformidad del estado de tensión-deformación en la barra, obtendremos el mismo resultado si medimos los alargamientos unitarios (en la dirección  $x_1$  y en dirección transversal) en cualquier punto de la barra, o si les calculamos haciendo un promedio en segmentos de longitud finita, dividiendo el incremento de longitud del segmento entre su longitud inicial. Por ejemplo, la deformación longitudinal unitaria se obtiene frecuentemente como el desplazamiento relativo de las mordazas dividido por su distancia inicial. Este procedimiento implica un cierto error debido a que en las zonas próximas a las mordazas el estado de tensión no será unidireccional. Sin embargo estas zonas son pequeñas en comparación con la longitud de la probeta, y el error suele ser pequeño. Quizá el procedimiento más exacto sea la utilización de una galga

extensométrica en algún punto de la zona central de la probeta, alejada de las mordazas. Este dispositivo consiste básicamente en adherir un pequeño filamento conductor a la superficie del sólido, para que se deforme con él. Al estirarse se produce una variación en la resistencia eléctrica del filamento, lo que se utiliza para medir la deformación. Existen galgas con filamentos en varias direcciones, lo que facilita la medición simultánea de la deformación en la dirección del eje de la barra y en una dirección perpendicular.

Mediante alguno de los procedimientos descritos se obtiene la información de cuánto vale la deformación en la dirección  $x_1$  y en una dirección perpendicular, para cada nivel de tensión. La figura 4.9 muestra un resultado típico de deformación longitudinal para un acero dulce.



**Figura 4.9.-** Diagrama  $\sigma_{11}/\epsilon_{11}$  típico de un ensayo de tracción para un acero dulce.

Lo primero que llama nuestra atención en la gráfica anterior es el tramo recto inicial, que indica una proporcionalidad entre tensión y deformación. La gráfica deja de ser recta cuando la tensión alcanza el valor  $\sigma_p$ , que llamamos límite de proporcionalidad. El comportamiento en este tramo es elástico, ya que si se procede a descargar la probeta antes de haber alcanzado  $\sigma_e$ , la misma recupera sus dimensiones originales. El comportamiento elástico se extiende a niveles de carga ligeramente superiores al límite de proporcionalidad, siendo  $\sigma_e$  el valor límite pasado el cual una eventual descarga deja ya cierta deformación permanente en la probeta.

A una tensión ligeramente superior, que llamamos tensión de fluencia  $\sigma_f$ , se produce el fenómeno de "fluencia" del material. Consiste en un periodo de alargamiento a tensión sensiblemente constante, como indica el tramo irregular horizontal de la gráfica. Este fenómeno de fluencia no es tan acusado en otros materiales como lo es en el acero. Las tensiones  $\sigma_p$ ,  $\sigma_e$ , y  $\sigma_f$  son muy próximas, siendo difícil realizar distinción entre ellas. Es frecuente aceptar que las tres coinciden, tomándose como su valor el de la tensión necesaria para producir una deformación plástica de 0.002 (0.2%), que a su vez suele considerarse como el menor valor de deformación plástica digno de ser tenido en cuenta.

Si una vez en la zona de fluencia, en el nivel de deformación correspondiente al punto C de la figura, descargamos la probeta, la gráfica sigue la línea recta de puntos paralela a la recta del periodo elástico, quedando una deformación remanente (deformación plástica) en la probeta. Nótese la similitud de este comportamiento con el modelo de plasticidad ideal de la figura 4.6.

Llegado un cierto nivel de deformación, vuelve a ser necesario aumentar la carga para que la deformación siga aumentando, como indica el tramo curvo que sigue al de fluencia. Este tramo curvo, hasta que se alcanza en máximo, es el tramo de endurecimiento por deformación. Si se descarga la probeta desde un punto D correspondiente a esta zona, la descarga se produce nuevamente siguiendo una línea recta paralela a la del periodo elástico. Si se vuelve a cargar desde este estado se observará que el límite elástico ha aumentado, como puede apreciarse en la figura. Nótese la similitud de este comportamiento con el modelo de plasticidad con endurecimiento de la figura 4.7.

El punto máximo de la gráfica nos da la tensión de rotura,  $\sigma_R$ . En efecto, puede apreciarse que el tramo descendente final indica un comportamiento inestable, ya que para obtener más deformación es necesaria menor tensión. En la práctica ello implica que este tramo se recorre sin control hasta la rotura de la probeta. Hay que decir aquí que la tensión de la gráfica se obtiene siempre como la fuerza aplicada dividida por la sección *inicial* de la barra, lo cual es una buena aproximación durante todo el experimento, salvo precisamente en este tramo final. La razón es que previamente a la rotura se produce una estricción importante de la sección en algún punto de la longitud de la barra, probablemente en la sección en que el material contenga más imperfecciones. El área real de esta sección es menor que la nominal empleada para obtener la tensión del gráfico, por lo que las tensiones reales serán apreciablemente mayores que las del gráfico en esta zona.

Finalmente, hay que apuntar que la carga y descarga durante el periodo elástico no siguen exactamente el mismo camino, dibujándose en realidad un pequeño bucle en el gráfico tras la carga y descarga. Este efecto se denomina histeresis del material, y lleva asociado un fenómeno de disipación de energía que siempre acaba por resolverse como calor generado en el seno del sólido, y finalmente cedido al ambiente.

Generalmente, las condiciones de servicio de un acero se plantean en el período elástico, siendo menos frecuente el contar en el diseño con el comportamiento post-elástico del material. Esto hace cobrar una importancia particular a la hipótesis de comportamiento elástico lineal del material, dándose la afortunada circunstancia de que además es el más sencillo desde el punto de vista matemático, como se apuntó al principio. Del resultado del ensayo en este tramo lineal de interés, obtenemos dos constantes. En primer lugar definimos la constante E, que llamaremos módulo de Young, como la pendiente de la recta en el periodo elástico. Es decir:

$$\sigma_{11} = E \varepsilon_{11} \quad (\text{en el ensayo}) \quad (4.2)$$

Podemos calcular esta constante como  $E = \tan \alpha$ , siendo  $\alpha$  el ángulo indicado en la figura 4.9. Definimos una segunda constante,  $\nu$ , llamada coeficiente de Poisson, como la

relación del acortamiento transversal unitario (es indiferente cuál sea la dirección transversal considerada debido a la isotropía del material) entre alargamiento longitudinal unitario. Por tanto:

$$\nu = \frac{-\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \left( = \frac{-\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} \right) = \frac{-E\varepsilon_{22}}{\sigma_{11}} \quad (\text{en el ensayo}) \quad (4.3)$$

Unos valores típicos para el acero dulce son  $E=2.1 \times 10^6 \text{ Kp/cm}^2 \cong 210 \text{ GPa}$  ;  $\nu=0.3$  (adimensional). El elevado valor de E para el acero hace que las deformaciones sean pequeñas durante el período elástico, siendo plausible la hipótesis de pequeñas deformaciones. Orientativamente, el módulo de Young de las fundiciones, bronce y otras aleaciones metálicas suele ser del orden de la mitad del de los aceros, y el de los cementos y maderas menos de la décima parte. Hay que notar al respecto que no todos los materiales presentan un periodo lineal tan claramente definido. El Módulo de Young se entiende en estos casos como un valor obtenido mediante “ajuste razonable” en cierto rango de valores de tensión.

#### 4.4.- Ley de comportamiento para materiales elásticos, lineales e isótropos.

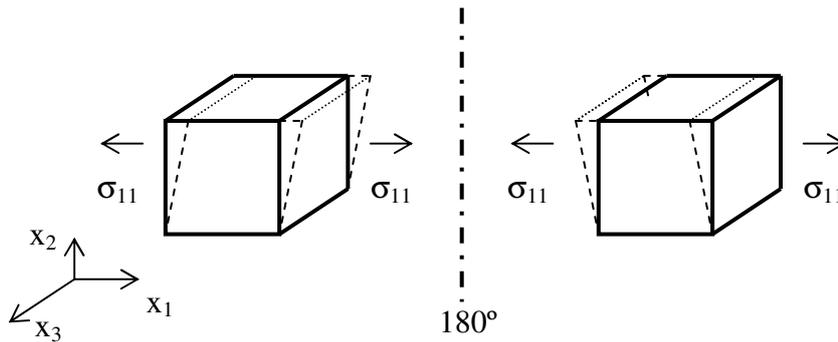
Pretendemos obtener la expresión de la ley de comportamiento lineal elástica, -que se expresa de forma general mediante la ecuación 4.1, para el caso particular de material isótropo. Comencemos por resaltar algunos hechos de interés:

a) Por tratarse de una relación lineal, será aplicable el Principio de Superposición.

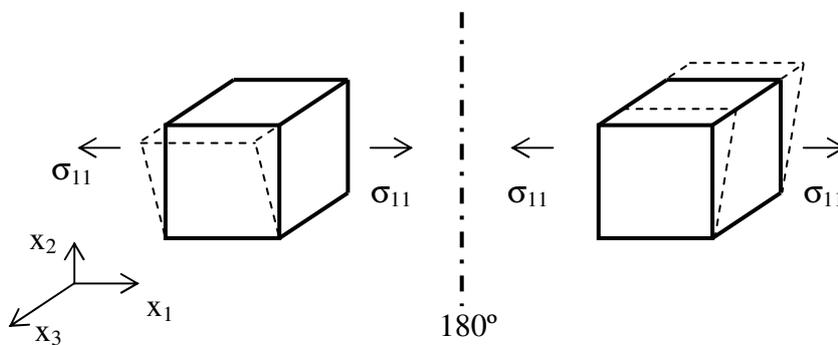
Se trata de una propiedad bien conocida de las relaciones lineales. En nuestro caso implica que dados dos estados de tensión en un punto (en un “cubo diferencial”), las deformaciones cuando actúan ambos simultáneamente coinciden con la suma de las deformaciones correspondientes a los estados de tensión por separado. Lo mismo cabe decir de dos estados de deformación dados en cuanto a sus tensiones asociadas.

b) Si el material es isótropo y solamente actúan tensiones normales, no habrá deformaciones transversales.

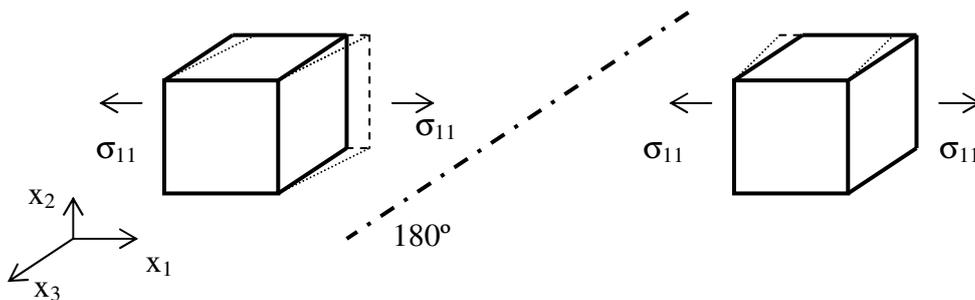
Por ejemplo, si solamente actúa  $\sigma_{11}$ , las deformaciones  $\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{13}$ ,  $\varepsilon_{23}$ , serán nulas. Para verlo puede razonarse como ilustra la figura 4.10. La misma representa una deformación  $\varepsilon_{12}$  en un cubo diferencial en el que solamente actúa tensión  $\sigma_{11}$ . También existirían las esperadas deformaciones  $\varepsilon_{11}$  (alargamiento) y  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{33}$  (contracción de Poisson), las cuales no se han representado por claridad, ya que no afectan al razonamiento. Si girásemos el cubo  $180^\circ$  respecto de un eje paralelo a  $x_2$  como el representado, obtendríamos el mismo sólido (afirmar esto con generalidad requiere que el material sea isótropo), sometido a las mismas cargas, pero que se deforma de distintas maneras. Esta violación del principio de causalidad es físicamente un absurdo, amén de contravenir la biunicidad entre tensión y deformación asumida en el comportamiento lineal, por lo que cabe llegar a la conclusión de que  $\varepsilon_{12}$  será nulo. La misma conclusión se obtiene girando respecto de un eje paralelo a  $x_1$ .



**Figura 4.10.-** Imposibilidad de deformación transversal  $\epsilon_{12}$  bajo tensión normal  $\sigma_{11}$  en un material isotrópico.



**Figura 4.11.-** Imposibilidad de deformación transversal  $\epsilon_{23}$  bajo tensión normal  $\sigma_{11}$  en un material isotrópico.



**Figura 4.12.-** Imposibilidad de deformación transversal  $\epsilon_{13}$  bajo tensión normal  $\sigma_{11}$  en un material isotrópico.

La figura 4.11 muestra el mismo cubo diferencial, ahora con una deformación  $\epsilon_{23}$ . Con el mismo giro que en el caso anterior se llega análogamente a la conclusión de que  $\epsilon_{23}$  debe ser nulo. La misma conclusión se obtiene girando respecto de un eje paralelo a  $x_3$ .

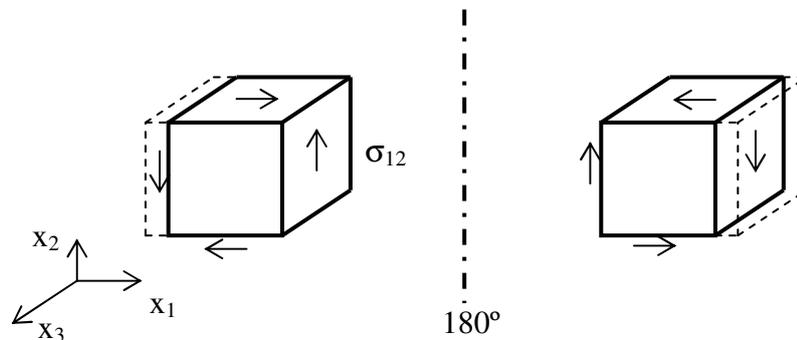
La figura 4.12 muestra el mismo cubo con la misma carga pero con una deformación  $\epsilon_{13}$ . Girando  $180^\circ$  respecto de un eje paralelo a  $x_3$  se obtiene el mismo sólido elemental (dada la isotropía), con la misma tensión, pero distinta deformación. La conclusión es

que  $\epsilon_{13}$  debe ser nulo. La misma conclusión se obtiene girando respecto de un eje paralelo a  $x_1$ .

Se ha mostrado que si solamente hay tensión  $\sigma_{11}$  en el elemento, no se producirá ninguna deformación transversal ( $\epsilon_{12}$ ,  $\epsilon_{13}$ ,  $\epsilon_{23}$ ) en el mismo. El demostrar que lo mismo ocurre con  $\sigma_{22}$  o  $\sigma_{33}$  es tan fácil como cambiar de nombre a los ejes en los razonamientos precedentes. Finalmente, si actúan simultáneamente  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ , y  $\sigma_{33}$ , el principio de superposición indica que tampoco aparecerán deformaciones transversales en este caso, como afirmaba el enunciado b) inicialmente.

c) Si el material es isótropo y la única acción es una componente de tensión tangencial, todas las componentes de deformación serán nulas salvo la de iguales subíndices que la componente de tensión.

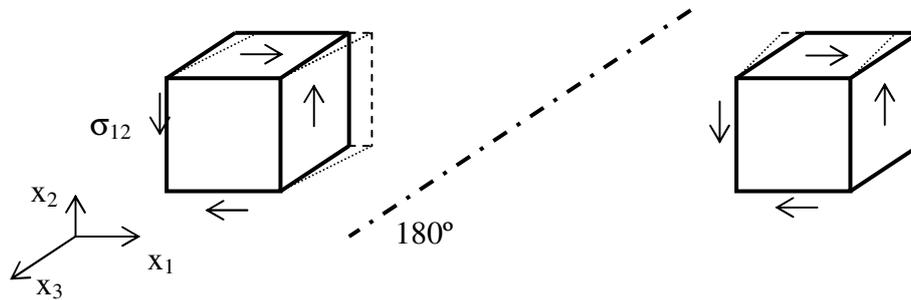
Por ejemplo, asumamos que solamente actúa  $\sigma_{12}$ , y supongamos que ello produce, entre otras posibles componentes, la deformación  $\epsilon_{11}$  positiva que se representa en la figura 4.13. Girando  $180^\circ$  el cubo diferencial respecto de un eje paralelo a  $x_2$  se obtiene el mismo sólido (nuevamente el poder afirmar lo anterior con generalidad requiere que el material sea isótropo), con la misma deformación (un alargamiento del cubo), pero con las tensiones en sentido contrario. Dada la linealidad del comportamiento, al cambiar el signo de las tensiones debiera cambiar el signo de las deformaciones, lo que como se muestra no ocurrirá en este caso a no ser que  $\epsilon_{11}$  sea cero. La misma conclusión se obtiene girando respecto de un eje paralelo a  $x_1$ .



**Figura 4.13.-** Imposibilidad de deformación normal  $\epsilon_{11}$  bajo tensión tangencial  $\sigma_{12}$  en un material isótropo.

Sobre la misma figura 4.13 puede razonarse que  $\epsilon_{22}$  y  $\epsilon_{33}$  serán también nulos. Véase: el giro que se propone cambia en todo caso el signo de  $\sigma_{12}$  y mantiene el de la deformación normal que se esté considerando, ya sea  $\epsilon_{22}$  o  $\epsilon_{33}$ .

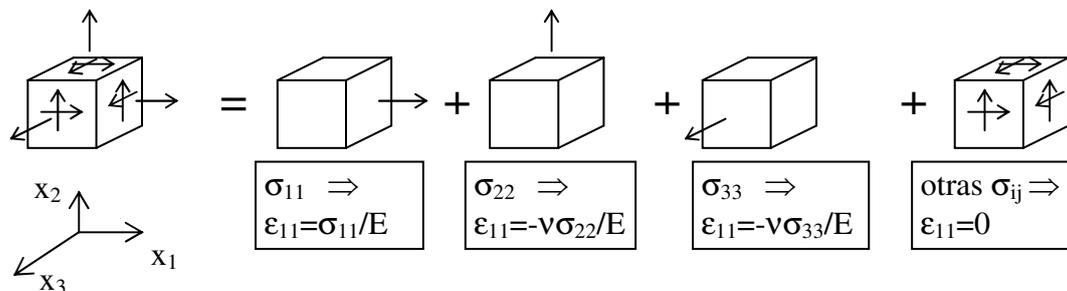
La figura 4.14 muestra el cubo diferencial sometido a la misma tensión  $\sigma_{12}$ , y con una deformación  $\epsilon_{13}$ . Girando  $180^\circ$  respecto de un eje paralelo a  $x_3$  se obtiene el mismo sólido (por la isotropía), con las mismas tensiones aplicadas, pero con la deformación  $\epsilon_{13}$  en sentido contrario. Usando argumentos análogos a los de párrafos precedentes, concluimos que  $\epsilon_{13}$  debe ser nulo.



**Figura 4.14.-** Imposibilidad de deformación transversal  $\epsilon_{13}$  bajo tensión tangencial  $\sigma_{12}$  en un material isótropo.

La demostración de que la componente de tensión  $\sigma_{12}$  no puede producir por sí misma deformación  $\epsilon_{23}$  se realiza razonando sobre el mismo giro empleado en la figura 4.14 anterior, y se deja ya del cuidado del lector. Con esto se ha mostrado que si la única componente de tensión que actúa en el cubo diferencial es  $\sigma_{12}$ , solamente habrá deformación  $\epsilon_{12}$ , siendo nulas todas las demás componentes de tensión,  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{22}$ ,  $\epsilon_{33}$ ,  $\epsilon_{13}$ ,  $\epsilon_{23}$ . El realizar una demostración análoga para  $\sigma_{13}$  y  $\sigma_{23}$  solamente requiere cambiar el nombre de los ejes en el razonamiento anterior.

Conocidas las premisas a), b), y c) anteriores, pasamos a construir la ley de comportamiento para el material isótropo. Tomaremos un cubo diferencial sobre el que actúan todas las posibles componentes de tensión,  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$ , y calcularemos cada componente de deformación.



**Figura 4.15.-** Superposición de efectos aplicada a la componente  $\epsilon_{11}$ .

Comenzaremos por  $\epsilon_{11}$ . Calcularemos su valor aplicando el principio de superposición de efectos, como sugiere la figura 4.15. Las componentes de tensión transversal no producen deformación  $\epsilon_{11}$ , y las componentes normales de tensión producen deformaciones  $\epsilon_{11}$  cuyos valores se obtienen del ensayo de tracción. Por tanto:

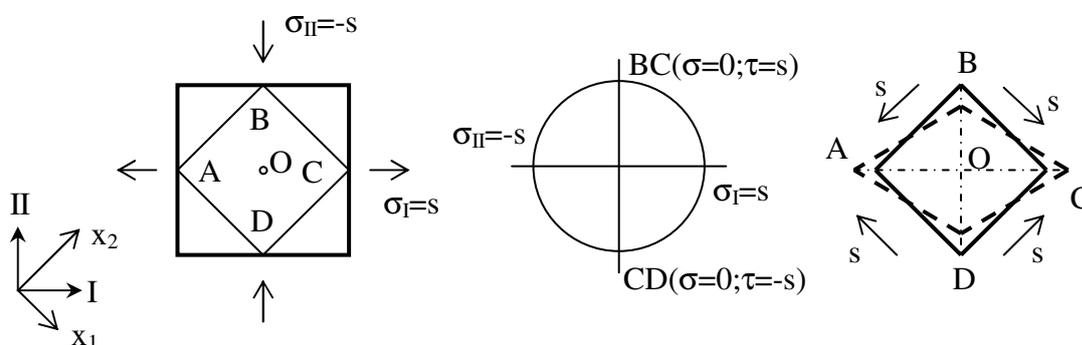
$$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= \sigma_{11}/E - \nu\sigma_{22}/E - \nu\sigma_{33}/E \\ \epsilon_{22} &= \sigma_{22}/E - \nu\sigma_{11}/E - \nu\sigma_{33}/E \\ \epsilon_{33} &= \sigma_{33}/E - \nu\sigma_{11}/E - \nu\sigma_{22}/E\end{aligned}\quad (4.4)$$

En donde las componentes  $\epsilon_{22}$  y  $\epsilon_{33}$  anteriores se han obtenido razonando de forma análoga a como se ha hecho para  $\epsilon_{11}$ .

Las premisa c) se resume en que cada componente de tensión tangencial depende solamente de su correspondiente componente de deformación transversal (o viceversa). Habrá por tanto una constante de proporcionalidad, que notaremos  $2G$ , entre  $\epsilon_{12}$  y  $\sigma_{12}$ . La isotropía del material implica evidentemente que esta constante será la misma para las componentes 13 y 23 de tensión-deformación. Por tanto:

$$\begin{aligned} 2\epsilon_{12} &= \gamma_{12} = \sigma_{12}/G \\ 2\epsilon_{13} &= \gamma_{13} = \sigma_{13}/G \\ 2\epsilon_{23} &= \gamma_{23} = \sigma_{23}/G \end{aligned} \tag{4.5}$$

La nueva constante  $G$  que hemos introducido se conoce como “Módulo de Cortadura”. En principio, podría pensarse que se trata de una constante elástica más, y que es necesaria para describir el comportamiento del material isótropo. Pero en realidad ocurre que esta constante no es independiente de las otras dos,  $E$ ,  $\nu$ , que hemos definido antes. Una manera sencilla de comprobarlo es considerar un elemento diferencial cuyas caras sean planos principales de tensión, con tensiones principales  $\sigma_I=s$ ,  $\sigma_{II}=-s$ ,  $\sigma_{III}=0$ , como indica la primera de las figuras 4.16.



**Figura 4.16.-** Caso particular para mostrar la dependencia entre  $G$ ,  $E$  y  $\nu$ .

Tomaremos un elemento cuadrado, de forma que  $OA = OB = OC = OD$ , digamos  $=L$ . Obtenemos las deformaciones en las direcciones I y II aplicando la misma idea de superposición de estados de tracción que se usó para obtener las ecuaciones 4.4. Conocidas estas deformaciones, es inmediato calcular la longitud final de los segmentos  $OA$  y  $OB$ .

$$\begin{aligned} \epsilon_I &= s/E - \nu(-s)/E = s(1+\nu)/E \Rightarrow OA + \Delta_{OA} = L + L\epsilon_I = L [ 1 + s(1+\nu)/E ] \\ \epsilon_{II} &= (-s)/E - \nu s/E = -s(1+\nu)/E \Rightarrow OB + \Delta_{OB} = L + L\epsilon_{II} = L [ 1 - s(1+\nu)/E ] \end{aligned}$$

La tangente del ángulo que forman  $AO$  y  $AB$  tras la deformación puede calcularse como el cociente entre las longitudes finales de  $OA$  y  $OB$  anteriores:

$$\operatorname{tg}(AO, AB) = \frac{1-s(1+\nu)/E}{1+s(1+\nu)/E} \quad (4.6)$$

Por otra parte, considerando unos ejes  $x_1, x_2$ , como se muestra en la figura 4.16, el ángulo entre AD y AB tras la deformación será  $\pi/2 - \gamma_{12}$ , por propia definición de  $\gamma_{12}$ . A la vista de la simetría, el ángulo entre AO y AB tras la deformación será justamente la mitad,  $\pi/4 - \gamma_{12}/2$ . Empleando la fórmula trigonométrica de la tangente de la suma de dos ángulos, tenemos:

$$\operatorname{tg}(AO, AB) = \operatorname{tg}(\pi/4 - \gamma_{12}/2) = \frac{\operatorname{tg}(\pi/4) - \operatorname{tg}(\gamma_{12}/2)}{1 + \operatorname{tg}(\pi/4)\operatorname{tg}(\gamma_{12}/2)} \cong \frac{1 - \gamma_{12}/2}{1 + \gamma_{12}/2}$$

La segunda figura muestra el diagrama de Mohr (en el plano del dibujo) para el estado de tensión propuesto. Como se aprecia, en planos a  $45^\circ$  de los principales, como AB, AD, etc, solamente hay tensión tangencial, y ésta tiene valor absoluto 's'. Aplicando la primera ecuación de comportamiento de (4.5), en los ejes  $x_1, x_2$  (si el material es isótropo la ley de comportamiento tendrá la misma forma en cualesquiera ejes), se tiene que  $\gamma_{12} = s/G$ , que sustituido en la ecuación anterior produce:

$$\operatorname{tg}(AO, AB) = \operatorname{tg}(\pi/4 - \gamma_{12}/2) \cong \frac{1 - s/2G}{1 + s/2G}$$

Comparando la expresión anterior con la (4.6) observamos directamente que debe ser  $s(1+\nu)/E = s/2G$ , y por tanto:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.7)$$

La relación anterior muestra explícitamente que G no es en realidad una nueva constante independiente, sino que depende de las E,  $\nu$ , utilizadas anteriormente.

Llevando este valor de G a (4.5) resulta posible escribir todas las ecuaciones de comportamiento, (4.4) y (4.5), de una manera compacta:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[ (1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij} \right] \quad (4.8)$$

La ley de comportamiento puede expresarse de muchas otras maneras, jugando con si se muestran despejadas las tensiones en función de las deformaciones o al contrario, y haciendo intervenir distintas parejas de constantes elásticas. Como ejemplo, vamos a obtener las tensiones en función de las deformaciones a partir de (4.8). El camino más sencillo es expresar  $\sigma_{kk}$  en función de las deformaciones, llevar ese valor a (4.8), y despejar  $\sigma_{ij}$ . Para calcular  $\sigma_{kk}$  en función de las deformaciones podemos escribir (4.8) con un mismo símbolo, digamos p, en lugar de los i, j. Esto equivale estrictamente a sumar las tres ecuaciones (4.4). Tenemos así:  $\varepsilon_{pp} = [(1+\nu)\sigma_{pp} - 3\nu\sigma_{kk}]/E = \sigma_{pp}(1-2\nu)/E$ . Por tanto,

$$\sigma_{kk} = \frac{E}{(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \quad (4.9)$$

Llevando este valor a (4.8) y despejando  $\sigma_{ij}$  resulta:

$$\sigma_{ij} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij} \quad (4.10)$$

Que es otra forma igualmente válida de la ley de comportamiento lineal isótropa, y que expresa tensiones en función de deformaciones usando las constantes E,  $\nu$ . Se suele usar la notación  $\lambda$  para la primera fracción que aparece en (4.10):

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4.11)$$

Al parámetro  $\lambda$ , que depende de las propiedades del material como se aprecia, se le denomina “Módulo de Lamé”, y es otra constante que podemos usar para caracterizar el comportamiento del material, si bien, al igual que ocurre con G, no es independiente de las introducidas anteriormente. La segunda fracción que aparece en (4.10) es, según (4.7) igual a 2G, con lo que (4.10) puede escribirse alternativamente como:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (4.12)$$

Que nuevamente es otra forma válida de la ley de comportamiento, expresando también tensiones en función de deformaciones, pero esta vez usando las constantes  $\lambda$ , G. La ley de comportamiento admite otras muchas expresiones que se obtienen de forma análoga, no siendo de especial interés continuar detallándolas. Más interesante se considera dejar claramente expuestos los hechos que gobiernan toda esa posible casuística, y que se resumen a continuación.

- El comportamiento del material lineal elástico isótropo queda identificado por sólo dos constantes independientes.
- Se comprueba que cualquiera de las constantes elásticas E, G,  $\lambda$ ,  $\nu$ , puede expresarse en función de otras dos elegidas entre las tres restantes.
- Puede elegirse cualquier pareja de constantes elásticas de entre E, G,  $\lambda$ ,  $\nu$ , para expresar la ley de comportamiento.
- Es posible expresar tensiones en función de deformaciones o viceversa utilizando cualquier pareja de constantes que se elija, entre E, G,  $\lambda$ ,  $\nu$ .

### Direcciones principales de tensión y de deformación.

Por ser tensores simétricos de orden dos, tanto la tensión como la deformación poseen direcciones principales, pero eso no significa que deban ser las mismas para ambos. De hecho, en general (materiales anisótropos) no coinciden, pero se da la circunstancia de que en materiales isótropos sí. Para demostrarlo bastará con observar por ejemplo la forma (4.12) de la ley de comportamiento, y recordar del álgebra lineal que las direcciones propias asociadas a una matriz no cambian si se multiplica a la matriz por una constante ( $2G$  en nuestro caso) y tampoco si se le suma una constante a su diagonal principal ( $\lambda e$  en este caso). Por tanto:

En el caso de comportamiento isótropo las direcciones  
principales de tensión y de deformación coinciden.

### Rango de valores de las constantes elásticas

Es de interés conocer el rango de valores que adoptan las constantes elásticas. En relación con ello, conviene comenzar precisando que la deformación de los sólidos no es excepción respecto de las reglas que obedecen todos los procesos conocidos de la naturaleza, y que son las leyes de la termodinámica. Con esto se quiere poner de manifiesto que habrá determinados rangos de valores que las constantes no puedan adoptar, independientemente de lo moderno que sea el material. Por otra parte, tendremos el rango de valores de las constantes observado experimentalmente, que evidentemente no se saldrá de lo que es termodinámicamente posible, pero que se obtiene independientemente. Aunque el ofrecer argumentos más completos al respecto se sale del propósito de la exposición que sigue, la misma intenta poner de manifiesto de qué naturaleza son los límites enunciados.

Comencemos por lo más evidente: en la experimentación se observa invariablemente que una barra de cualquier material siempre se alarga (en ningún caso se acorta) cuando se le aplica una tracción. Se trata en realidad de una imposición termodinámica, ya que no sería difícil diseñar un ascensor que trabajase sin consumir energía usando resortes de un material que no se comportase así. Por tanto siempre debe ser:

$$E > 0$$

También se observa que un sólido sometido a compresión hidrostática siempre experimenta un decremento de volumen, nunca un aumento. También se trata de una imposición termodinámica: piénsese por ejemplo que un sólido que se comportase contrariamente sumergido en un recipiente lleno de agua y cerrado, haría aumentar la presión en el mismo indefinidamente. Como es sabido, en un estado de presión hidrostática el tensor de tensiones tiene la forma  $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}$ , siendo  $p$  el valor de la presión. La ecuación (4.9) conduce a:

$$e = \epsilon_{kk} = \frac{-3p}{E}(1 - 2\nu)$$

Lo que indica que para que la dilatación cúbica unitaria sea efectivamente negativa, debe ser  $\nu < 0.5$ . Vemos el valor extremo  $\nu=0.5$  correspondería a un material incompresible, ya que no cambiaría su volumen por grande que fuese la presión.

Por otra parte siempre se observa experimentalmente que una barra a tracción sufre un acortamiento de las dimensiones transversales. Luego a la vista de la definición (4.3), tenemos que  $\nu$  será positivo. Pero no hay razones termodinámicas por las que esto deba ser así. De hecho, se ha conseguido sintetizar en laboratorio algún material con coeficiente de Poisson negativo. Curiosidades aparte, podemos considerar a efectos prácticos que:

$$0 < \nu < 0.5$$

Las restricciones anteriores para  $E$  y  $\nu$  llevadas a las ecuaciones (4.7) y (4.11) conducen inmediatamente a:

$$\lambda > 0 \quad ; \quad G > 0$$

La restricción  $G > 0$  anterior es una imposición termodinámica. Pero  $\lambda > 0$  no lo es, de la misma forma que no lo es  $\nu > 0$ , aunque puede darse por sentado que ambas serán efectivamente positivas en cualquier material usual. Argumentos basados en la energía de deformación (concepto introducido en un epígrafe posterior) de un estado de contracción hidrostática, permiten obtener que un límite termodinámico para  $\lambda$  viene dado por  $\lambda > -2G/3$ .

#### 4.5.- Comportamiento termoelástico desacoplado en materiales lineales isótropos.

En muchas situaciones de interés práctico, el estado de tensión-deformación de los sólidos está fuertemente influido por fenómenos térmicos, debido a la tendencia de los materiales a dilatarse al aumentar la temperatura. Conviene distinguir entre dos niveles en cuanto a dicha influencia:

- Por una parte, está el hecho de que el propio proceso de deformación lleva asociados fenómenos térmicos. Para proceder con rigor, el proceso de deformación debiera verse como un proceso termodinámico en su conjunto, en el que el trabajo de las fuerzas aplicadas es sólo un término más en las ecuaciones energéticas. Algunas de las conclusiones de este enfoque riguroso son, por ejemplo, que las constantes elásticas son distintas (aunque ligeramente) dependiendo de si el proceso de deformación es adiabático o isoterma, y que con la deformación se genera calor (aunque en cantidad usualmente pequeña) que a su vez influencia a la propia deformación, estando acoplados ambos fenómenos.
- Por otra parte, tenemos la posible concurrencia de fenómenos térmicos producidos por causas externas a la deformación, como calentamiento por irradiación solar, cercanía de calderas o motores de combustión, exposición al ambiente de invierno y de verano, etc. Estos efectos son de mucha mayor magnitud que los efectos térmicos asociados a la deformación, y son los únicos que se tienen en cuenta en las aplicaciones usuales de ingeniería.

A título meramente informativo, indicaremos que el modelo de comportamiento termoelástico lineal general puede resumirse en dos ecuaciones, una fundamentalmente térmica (expresa la entropía) pero que contiene un término elástico, y otra fundamentalmente elástica (expresa la tensión) pero que contiene un término térmico. El despreciar los “efectos térmicos asociados a la deformación” se traduce en despreciar la generación de entropía asociada a la deformación frente a la asociada a las variaciones de temperatura en la primera ecuación, que queda solamente con variables térmicas (es la conocida  $\nabla^2 T = T_{,ii} = 0$  en su forma más sencilla, y para régimen estacionario). Ésta puede resolverse en primer lugar, y permite manejar la segunda ecuación con el término térmico ya conocido.

El hecho de que puedan resolverse independientemente (“desacopladamente”) las ecuaciones térmicas y elásticas es lo que hace que este modelo se identifique como “termoelasticidad desacoplada”. Seguidamente asumiremos que el problema térmico ha sido resuelto independientemente, de forma que el campo de temperaturas es un dato a efectos operativos, y obtendremos la ecuación de comportamiento elástico en presencia un campo de temperaturas. Los razonamientos utilizados serán sencillos, si bien la ecuación que se obtendrá coincide con la que se obtiene del modelo termoelástico acoplado.

Es un hecho conocido que cuando un cuerpo se calienta, generalmente aumenta de volumen. Si la temperatura es constante en todo el sólido, y el mismo no tiene impedimentos para su dilatación, el incremento de longitud de cualquier línea del sólido, independientemente de la orientación de ésta, es proporcional al incremento de temperatura y a su longitud inicial. Se llama “coeficiente de dilatación térmica”  $\alpha$  al coeficiente de proporcionalidad, de unidades  $^{\circ}\text{C}^{-1}$ .

Consideremos ahora un cubo diferencial del material, sometido a un incremento de temperatura  $\theta$ , que siempre podremos considerar constante en ese pequeño volumen, sin ninguna otra acción ni restricción. El cubo se dilatará libremente, por igual en las tres direcciones, por lo que su tensor de deformaciones  $\epsilon^{\theta}_{ij}$  será:

$$\epsilon^{\theta}_{ij} = \alpha \theta \delta_{ij}$$

**Figura 4.17.-** Superposición de las deformaciones debidas a la tensión y a la temperatura.

En realidad el cubo diferencial no está aislado, sino en el seno del sólido al que pertenece, por lo que sobre sus caras se ejercen unas ciertas tensiones  $\sigma_{ij}$ , que producirán deformaciones adicionales. Calculamos la deformación total mediante superposición de ambas, como sugiere la figura 4.17. Tomando por ejemplo (4.8) como expresión de las deformaciones debidas a la tensión, que llamaremos  $\varepsilon_{ij}^\sigma$ , tenemos:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^\sigma + \varepsilon_{ij}^\theta = \frac{1}{E} \left[ (1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij} \right] + \alpha \theta \delta_{ij} \quad (4.13)$$

La anterior es una forma de la ley de comportamiento termoelástica para materiales isótropos. Se aprecia que las direcciones principales de tensión y deformación serán también coincidentes (para obtener las deformaciones se multiplica a  $\sigma$  por una constante y se añade otra constante a su diagonal).

Al igual que en ausencia de campo térmico, la ley de comportamiento admite multitud de expresiones. Como ejemplo, las siguientes son algunas de ellas:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2G) \alpha \theta \delta_{ij} \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2G} \left[ \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2G} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right] + \alpha \theta \delta_{ij} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Acerca de la posibilidad de deformación sin tensión.

Como excepción en este capítulo, vamos a plantear un problema macroscópico, en atención a que su interés es general. Consideremos un sólido homogéneo e isótropo que no tiene impedida su libre dilatación (sus condiciones de contorno en desplazamientos impiden, a lo sumo, posibles movimientos como sólido rígido). Sometemos al sólido a una cierta distribución de temperatura, pero no aplicamos ninguna fuerza. La pregunta que nos hacemos es si será o no será nula la tensión en el interior del sólido.

Para responder a la pregunta anterior, vamos a suponer que la tensión es cero, e impondremos esta hipótesis en las ecuaciones del modelo elástico. Encontraremos que deben satisfacerse algunas condiciones adicionales para que no haya incompatibilidades, por lo que la deformación sin tensión será posible solo bajo esas condiciones. Comenzamos apreciando que para tensiones nulas, (4.13) implica:

$$\varepsilon_{ij} = \alpha \theta \delta_{ij} \quad (4.15)$$

Las ecuaciones de equilibrio (2.12) y (2.13) se satisfacen idénticamente, dado que tanto las tensiones como las fuerzas de contorno y de volumen son nulas por hipótesis, por lo que su consideración no aporta ningún resultado de interés. Las ecuaciones de integrabilidad del tensor de deformaciones (3.32) permiten obtener:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_{,kl} \delta_{ij} + \theta_{,ij} \delta_{kl} - \theta_{,jl} \delta_{ik} - \theta_{,ik} \delta_{jl} = 0$$

La solución más sencilla de la ecuación diferencial anterior es una expresión lineal:

$$\theta = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

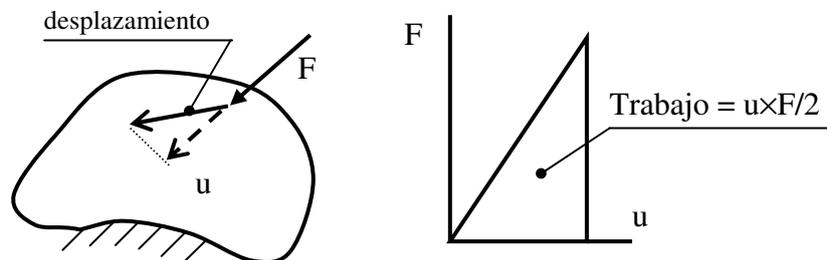
Por tanto, si el campo de temperaturas es lineal y no existen restricciones exteriores a la dilatación, habrá deformación sin tensión. Si el campo de temperaturas no es lineal, en general la ecuación diferencial anterior no se satisfará, indicando que la deformación será distinta de la dada por (4.15), para lo que debe existir tensión distinta de cero.

#### 4.6.- Densidad de Energía de Deformación.

Propongámonos calcular el trabajo que realizan las fuerzas, tanto de contorno como de volumen, que causan el proceso de deformación en el sólido.

Siendo tanto las aceleraciones como las transferencias de calor despreciables, el trabajo de las fuerzas actuantes se empleará exclusivamente en deformar el sólido, no en acelerarlo ni en calentarlo. En ausencia de esos fenómenos energéticos, el trabajo que queremos calcular coincidirá con el incremento de Energía Interna del sólido, en su concepción termodinámica. Como la Energía Interna es una función de estado, el trabajo que queremos calcular dependerá solamente del estado actual del sólido, y no de la historia de carga.

Lo anterior implica que podemos suponer cualquier historia de carga que nos sea cómoda para los cálculos, con tal de que deje el sistema con sus cargas actuales. Supondremos en concreto que todas las cargas (incluidas las de volumen) crecen a la vez desde su valor inicial nulo hasta su valor final. La figura 4.18 muestra un ejemplo sencillo, con sólo una fuerza aplicada. Para calcular el trabajo interesa la gráfica de fuerza  $F$  frente a desplazamiento  $u$  del punto de acción de la fuerza (en realidad la componente de desplazamiento en la dirección de  $F$ ). La gráfica es recta debido a la linealidad del comportamiento. El trabajo es el área bajo la gráfica, de valor  $u \cdot F/2$ , siendo  $u$  y  $F$  los valores finales.



**Figura 4.18.-** Cálculo del trabajo de las fuerzas aplicadas en un caso sencillo.

Aunque existan más fuerzas aplicadas, la linealidad del sistema implica que en cualquier momento intermedio del proceso de carga, en el que se ha aplicado una fracción dada de todas las cargas, los desplazamientos son la misma fracción de su valor final. Por ello, la gráfica de cualquier fuerza (ya sea diferencial o finita, de contorno o de volumen) frente

al desplazamiento de su punto de acción, tendría el mismo aspecto que el mostrado en la figura 4.18. El trabajo de cada una de ellas es, en todo caso, la mitad del producto del valor final de la fuerza por el del desplazamiento.

Ocupémonos ahora de un caso general, en el que el sólido ocupa un volumen  $V$  limitado por su contorno  $S$ , sobre el que se aplican distribuciones de fuerzas de contorno y de volumen de cualquier tipología (la eventual presencia de fuerzas concentradas sería considerada como un caso particular de fuerza de contorno). Las consideraciones del párrafo anterior nos permiten escribir que la expresión del trabajo, como:

$$\text{Trabajo} = \frac{1}{2} \int_V X_i u_i dV + \frac{1}{2} \int_S \bar{X}_i u_i dS \quad (4.16)$$

Vamos a manipular la expresión anterior para hacer aparecer las tensiones y deformaciones. Comenzamos por sustituir las fuerzas de contorno y de volumen por sus expresiones según las ecuaciones de equilibrio (2.8) y (2.13):

$$\text{Trabajo} = -\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij,j} u_i dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij} n_j u_i dS =$$

Aplicamos integración por partes a la primera integral:

$$= -\frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} u_i)_{,j} dV + \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} u_{i,j} dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij} n_j u_i dS =$$

Aplicamos el teorema de la divergencia a la primera de las integrales anteriores, para transformarla en una integral de contorno. En la segunda integral hacemos uso de que  $\sigma_{ij} u_{i,j} = \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$ . Véase:  $\sigma_{ij} u_{i,j} =$  (cualquier símbolo puede usarse como subíndice mudo)  $= \sigma_{ij} u_{i,j}/2 + \sigma_{ji} u_{j,i}/2 =$  (simetría de  $\sigma_{ij}$  aplicada al segundo sumando)  $= \sigma_{ij} u_{i,j}/2 + \sigma_{ij} u_{j,i}/2 =$  (factor común  $\sigma_{ij}$ )  $= \sigma_{ij}(u_{i,j} + u_{j,i})/2 =$  (por definición de  $\epsilon_{ij}$ )  $= \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$ .

$$= -\frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij} u_i n_j dS + \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij} n_j u_i dS = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV =$$

Evidentemente la primera y tercera integral se han cancelado entre sí. Resulta pues que el trabajo de las fuerzas actuantes se puede expresar como la integral en el volumen del sólido de la magnitud  $\sigma_{ij} \epsilon_{ij}/2$ . Llamaremos a esta magnitud “Densidad de Energía de Deformación”, y la denotaremos como  $W$ :

$$= \text{Trabajo} = \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = \int_V W dV \quad (4.17)$$

Hemos definido por tanto “Densidad de Energía de Deformación” como:

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad (4.18)$$

Esta magnitud tiene también un significado físico: Coincide con el trabajo que realizan las tensiones que actúan sobre las caras de un cubo diferencial de volumen  $dx_1 dx_2 dx_3 = dV$ , dividido por ese volumen. Esto puede comprobarse calculando ese trabajo directamente en el elemento diferencial, usando los movimientos relativos de sus caras y sus tensiones (por ejemplo, uno de los términos es  $\sigma_{11} dx_2 dx_3 \epsilon_{11} dx_1 / 2$ ). Se deja del cuidado del lector esa comprobación, con el aviso de que las deformaciones no aparecen de forma directa en los términos del trabajo de las tensiones tangenciales, sino que hay que manipular las expresiones usando la simetría del tensor de tensiones. Por razones obvias la integral de este trabajo diferencial  $W dV$ , expresada por (4.17), se denomina “trabajo interno”. Como hemos demostrado, esa integral es igual al trabajo de las fuerzas actuantes sobre el sólido, que está dado por (4.16), y que se suele denominar “trabajo externo”. Es pues de aplicación la conocida máxima de “trabajo interno igual a trabajo externo”, que también reza en otros tipos de problemas de la física mecánica. A esa cantidad, calculada de cualquiera de las dos maneras, se le denomina frecuentemente “energía de deformación” del sólido.

Es notable el que  $W$  no dependa linealmente de las demás magnitudes del modelo elástico. De hecho, la energía es la única magnitud no lineal de la Teoría de la Elasticidad. Ello tiene algunas implicaciones evidentes, como por ejemplo que sería incorrecto calcular la energía de deformación de un sólido aplicando el principio de superposición de efectos. Es éste un error frecuente contra el que conviene estar advertido.

#### Dos propiedades fundamentales de la Densidad de Energía de Deformación.

Para finalizar este epígrafe, expondremos dos propiedades fundamentales de la Densidad de Energía de Deformación. La primera de ellas consiste en que

*La derivada parcial de  $W$  respecto de una  
componente de deformación, da como resultado  
la correspondiente componente de tensión:*

$$\frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \quad (4.19)$$

Entiéndase en primer lugar el contexto implícito en la ecuación anterior, que contiene algunas sutilezas:

Por una parte, la derivación respecto de una componente de deformación merece algunas aclaraciones.  $W$  puede considerarse a la vista de (4.18) como dependiente de  $\sigma$  y de  $\epsilon$ , pero es sencillo expresar  $\sigma$  en función de  $\epsilon$  mediante la ley de comportamiento. Así pues, no hay inconveniente en pensar que  $W$  depende de las componentes de  $\epsilon$  solamente, y realizar una derivada parcial suya respecto de una de esas componentes. Adicionalmente, (4.19) asume una expresión de  $W$  como la (4.18), en cuyo desarrollo aparecen tanto  $\epsilon_{12}$  como  $\epsilon_{21}$  (por ejemplo), considerándose ambas como variables

distintas para la derivación. Esto es preciso si queremos que (4.19) tenga la generalidad de, por ejemplo, expresar tanto  $\sigma_{12}$  como  $\sigma_{21}$ .

Por otra parte, debe entenderse el carácter local de (4.19): La densidad de energía es una función de punto, y (4.19) nos sitúa por tanto en un punto del sólido. Cada componente de deformación en el entorno de ese punto habrá crecido desde cero, pensemos que en incrementos arbitrariamente pequeños de deformación. (4.19) expresa que la pequeña variación de  $W$  producida por uno de los pequeños incrementos de una componente de deformación (y dividida por la magnitud de dicho incremento), manteniéndose constantes las demás componentes, es igual a la correspondiente componente de tensión en ese punto, para los valores de deformación en los que se realizó el incremento.

Aclarado lo anterior, pasamos a comprobar la veracidad de (4.19). Podemos plantear una comprobación directa usando la ley de comportamiento en su forma (4.12):

$$W = \sigma_{ij}\epsilon_{ij}/2 = (\lambda e\delta_{ij} + 2G\epsilon_{ij})\epsilon_{ij}/2 = \lambda e^2/2 + G\epsilon_{kp}\epsilon_{kp}$$

Derivando respecto de  $\epsilon_{ij}$ , teniendo en cuenta las relaciones  $\partial e/\partial\epsilon_{ij} = \delta_{ij}$ ,  $\partial\epsilon_{kp}/\partial\epsilon_{ij} = \delta_{ki}\delta_{pj}$ , (en efecto, tal como se apuntó  $\epsilon_{kp}$  es una variable distinta de  $\epsilon_{pk}$ , aunque su valor sea el mismo), tenemos:

$$\frac{\partial W}{\partial\epsilon_{ij}} = 2 \frac{1}{2} \lambda e \frac{\partial e}{\partial\epsilon_{ij}} + 2G\epsilon_{kp} \frac{\partial\epsilon_{kp}}{\partial\epsilon_{ij}} = \lambda e\delta_{ij} + 2G\epsilon_{kp} \delta_{ki}\delta_{pj} = \lambda e\delta_{ij} + 2G\epsilon_{ij} = \sigma_{ij}$$

Como queríamos demostrar.

La densidad de energía de deformación, con su propiedad (4.19), existe en condiciones mucho más generales que las de linealidad e isotropía que manejamos aquí. Su existencia sirve como base de muchos desarrollos de la mecánica de sólidos, hasta tal punto que los problemas en los que puede definirse una función de Densidad de Energía de Deformación con esa propiedad (4.19), reciben un nombre propio: se llaman “hiperelásticos”.

La segunda propiedad fundamental de la Densidad de Energía de Deformación es la siguiente:

*La Densidad de Energía de Deformación puede tener un valor positivo o bien nulo, pero nunca negativo.*

$$W \geq 0 \tag{4.20}$$

Hay argumentos termodinámicos que indican que  $W$  debe ser en efecto una función positiva. Se presenta al respecto el siguiente razonamiento, de carácter intuitivo, pero que ayudará a comprender el porqué de esta propiedad sin complicar demasiado la exposición.

Considérese la expresión (4.16) del trabajo de las fuerzas aplicadas. Si pensamos en el caso sencillo de un ensayo de tracción, es evidente que ese trabajo es positivo, ya que el desplazamiento del extremo de la barra siempre se produce en el sentido de la fuerza. El hecho que se pretende resaltar es que el material *cede* ante la fuerza. El que el material reaccionase *contra* la fuerza sería termodinámicamente imposible (recuérdense los argumentos del final de 4.4 acerca de  $E > 0$ ), ya que nos proporcionaría trabajo “gratis”. En casos más complicados en cuanto a geometría y cargas, el hecho básico sigue siendo el mismo: el material debe *ceder* ante las cargas, esta vez en un cierto sentido promedio. Este “sentido promedio” es el proporcionado por el trabajo (4.16), que debe mantenerse positivo por los mismos motivos que en el ensayo de tracción.

Admitido lo anterior, piénsese en una porción del sólido aislada mediante un corte ideal. Si en la superficie de corte aplicamos las tensiones que existían, tenemos un nuevo sólido, en el que el trabajo de las fuerzas debe ser también positivo. Como podemos aplicar lo anterior a cualquier porción del sólido, se concluye que el integrando de (4.17) debe ser positivo en todo el sólido. El integrando no es otro que  $W$ , en concordancia con el enunciado propuesto.

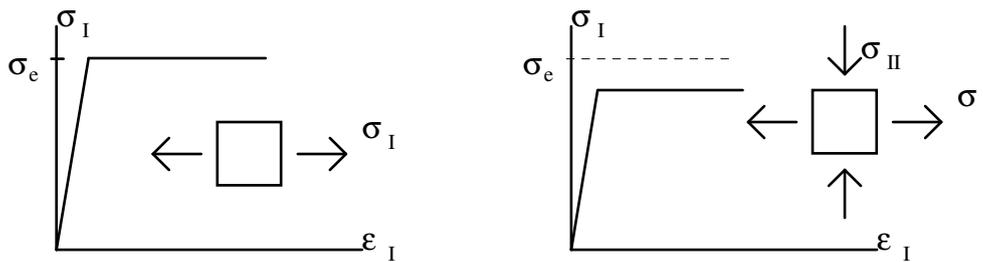
El valor nulo de  $W$  se dará cuando la deformación sea nula en el punto considerado, como resulta evidente a la vista de (4.18). Cuando utilizando modelos de primer orden (como el caso de la teoría de la elasticidad) se definen magnitudes locales basándose en propiedades que deben satisfacerse a nivel macroscópico, pueden surgir algunas paradojas en ciertos puntos particulares del dominio. El lector interesado en este tipo de curiosidades matemáticas puede consultar al respecto los artículos de Woods referenciados al final del capítulo.

Concluiremos con una nota acerca del rango posible de valores del Módulo de Lamé,  $\lambda$ . Al final del epígrafe 4.4 se indicó que un límite inferior suyo impuesto por la termodinámica es  $-2G/3$  siendo  $G$  el módulo de cortadura. Estamos ahora en condiciones de justificarlo. Considérese un estado de equicontracción en un punto de un material, digamos  $\epsilon_{ij} = -a\delta_{ij}$ , siendo  $a$  un cierto valor dado. La densidad de energía de deformación sería  $W = \sigma_{ij}\epsilon_{ij}/2 = (\lambda e\delta_{ij} + 2G\epsilon_{ij})\epsilon_{ij}/2 = [\lambda e e + 2G\epsilon_{ij}\epsilon_{ij}]/2 =$  (se tiene en este caso  $e = \epsilon_{kk} = -3a$ ;  $\epsilon_{ij}\epsilon_{ij} = a^2\delta_{ij}\delta_{ij} = 3a^2$ )  $= [\lambda 9a^2 + 2G3a^2]/2$ . Para que sea mayor que cero, debe ser  $3\lambda + 2G > 0$ , lo que justifica el límite para  $\lambda$  aludido.

#### 4.7.- Criterios de plastificación.

Parece evidente a la vista de los resultados en ensayos de tracción para el acero, que la hipótesis de comportamiento lineal elástico del material sólo será razonable en determinado rango de valores de las cargas. En este epígrafe daremos noticia de la información experimental básica asociada al comienzo de las deformaciones no elásticas, y presentaremos algunos criterios o teorías acerca de los mecanismos que gobiernan el fin del comportamiento elástico.

Como primer paso, es importante comprender que la información obtenida del ensayo de tracción (el valor del límite elástico  $\sigma_e$ ), sólo es indicativa del comportamiento en un estado unidireccional de tensión, siendo insuficiente para predecir la plastificación en un estado general de tensión tridimensional. Una evidencia experimental clara de que la plastificación no depende sólo de que la mayor tensión normal alcance el valor  $\sigma_e$ , es que la plastificación se produce antes de llegar a este valor si favorecemos el efecto de acortamiento lateral de Poisson mediante una compresión lateral adicional, como se indica en la figura 4.19 para un elemento diferencial.

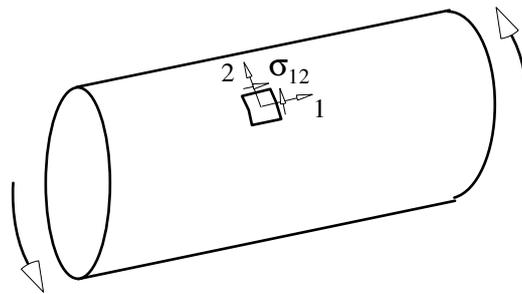


**Figura 4.19.-** Efecto de una compresión lateral en la plastificación bajo tracción.

Por tanto, debemos desechar generalizaciones tales como asumir que el límite elástico  $\sigma_e$  medido en el ensayo de tracción sea el valor límite de la tensión normal en una situación general. De hecho, los primeros criterios que fueron propuestos en la segunda mitad del siglo XIX por Rankine, Saint-Venant y otros investigadores, se basaban en extrapolaciones más o menos directas de los resultados de tensión unidireccional, y contradecían la evidencia experimental en estados más generales.

Es pues necesario disponer de alguna información experimental adicional que nos sugiera la manera en que el final del comportamiento elástico depende del estado tridimensional de sollicitación. A parte de los resultados del propio ensayo de tracción, contamos con los resultados de los ensayos de Lode, realizados en la década de 1920. Estos ensayos consisten en someter tubos de pared delgada a tracción (o compresión) combinada con torsión y con presión interior. De esta manera se consigue gran versatilidad en el control de la sollicitación en cualquier elemento de la superficie del tubo, sollicitación que será la misma en todos los puntos (salvo efectos de borde en los extremos del tubo). En efecto, bajo hipótesis de reparto uniforme de tensiones asumibles en este caso, la tracción exterior provocará solamente tensión  $\sigma_{11}$  en el elemento de tubo (la orientación asumida del elemento se muestra en la figura 4.20), el momento torsor solamente tensión tangencial  $\sigma_{12}$ , y la presión interna produce principalmente tensión  $\sigma_{22}$  (la componente  $\sigma_{33}$  es despreciable por tratarse de tubos de pared delgada; la tensión  $\sigma_{11}$  debida a la presión depende de las condiciones de apoyo en los extremos del tubo). Resumiremos brevemente las conclusiones de estos ensayos diciendo que la plastificación depende poco de la forma que tenga el diagrama de Mohr (es decir, de la posición de la tensión principal intermedia  $\sigma_{II}$  en relación a las otras dos), y tampoco depende apreciablemente de si el diagrama se desplaza en el eje  $\sigma$  manteniendo su forma. El que se produzca o no la plastificación depende fundamentalmente del tamaño del diagrama, es decir del tamaño de la mayor de las circunferencias, o lo que es lo mismo, del valor de la máxima tensión tangencial. Para ser más precisos, se observa el

comienzo de la plastificación cuando la tensión tangencial máxima llega a valores entre  $0.5\sigma_e$  (correspondiendo a los casos de tracción o compresión pura) y  $0.56\sigma_e$  (que corresponde al caso llamado "tensión tangencial pura", obtenido cuando sólo se aplica momento torsor). El estado de tensión bajo el que se obtiene este último resultado se ilustra en la figura 4.20, y será usado posteriormente como indicador de la exactitud de los diversos criterios.



**Figura 4.20.-** Estado de "tensión tangencial pura".

Citaremos también que en la década de 1950, Bridgman observó que la compresión hidrostática de los sólidos produce siempre deformación elástica. Admitiendo la validez del principio de superposición cuando el material no ha plastificado, lo anterior indica que la plastificación o no de un material no depende de si se le superpone o no determinado estado de presión hidrostática al estado de tensión inicial. Esto equivale a decir que la plastificación no dependerá del tensor medio de tensiones (ver epígrafe 2.7). El conjunto de evidencias experimentales que hemos citado, y que están referidas fundamentalmente al acero y otros materiales metálicos, servirán de guía general para juzgar la verosimilitud de un criterio dado en los apartados posteriores.

### Superficie de plastificación

Es posible establecer algunas características generales que cualquier criterio debe satisfacer para ajustarse al comportamiento observado experimentalmente. Para tomar como punto de partida un planteamiento de suficiente generalidad, podemos recabar la evidencia básica de que la plastificación depende del estado de tensión en el punto considerado. Además, a la vista del comportamiento "con endurecimiento" observado en el ensayo de tracción, esperamos que la plastificación se produzca a niveles mayores de tensión si ha habido plastificación en procesos de carga previos. En consecuencia, la plastificación o no en el proceso de carga actual también dependerá de la deformación plástica de esos procesos previos. Esperamos así que la plastificación se produzca cuando una cierta función del estado de tensión y de la deformación plástica acumulada alcance cierto valor. Este valor dependerá de las propiedades del material, asumiéndose que solamente el límite elástico  $\sigma_e$  es relevante a estos efectos. Por tanto la forma que consideraremos como más general de un criterio de plastificación será:

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^{plast}) \leq g(\sigma_e) \quad (4.21)$$

En donde  $f$  y  $g$  representan genéricamente cierta dependencia funcional, a especificar por cada criterio particular, y no existirá nueva plastificación hasta que no se llegue a la igualdad de ambos términos. En gran parte de las aplicaciones prácticas, desearíamos que el material permanezca dentro del periodo elástico, en cuyo caso no se considerará la posibilidad de deformaciones plásticas, y la forma de un criterio pasará a ser:

$$f(\sigma_{ij}) \leq g(\sigma_e) \quad (4.22)$$

Si el material es isótropo, la plastificación es independiente de la orientación de los ejes a los que esté referido el tensor de tensiones. Para materiales isótropos, las tensiones principales, o bien los invariantes del tensor, son pues información suficiente para un criterio de plastificación del tipo (4.22), que puede ponerse de la forma:

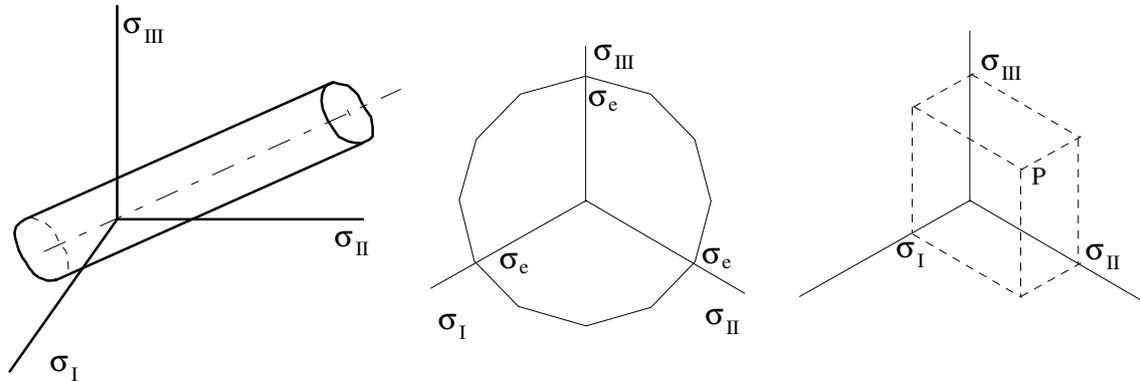
$$f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) \leq g(\sigma_e) \quad (4.23)$$

O bien en función de los invariantes:  $f(I_1, I_2, I_3) \leq g(\sigma_e)$ . Los ensayos de Bridgman comentados anteriormente sugieren que la plastificación depende solamente del tensor desviador de tensiones. Si llamamos  $J_1, J_2, J_3$ , a los invariantes del tensor desviador, y conociendo que siempre será  $J_1=0$ , concluimos que un criterio de plastificación podrá escribirse de forma que sólo dependa de  $J_2$  y  $J_3$ :

$$f(J_2, J_3) \leq g(\sigma_e) \quad (4.24)$$

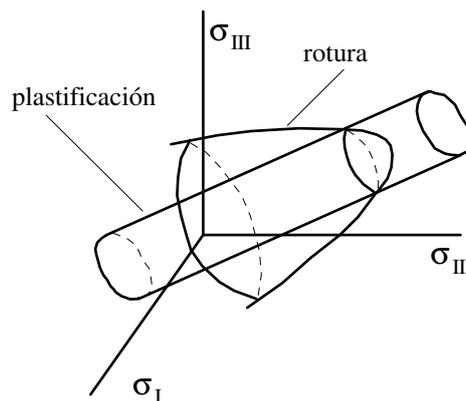
La superficie de plastificación es la superficie dada por una ecuación del tipo (4.23) en el espacio de tensiones principales, con igualdad de sus miembros. En el estudio de la superficie de plastificación (y de los diversos criterios), se abandona la suposición de que las tensiones principales están ordenadas de mayor a menor, lo que conducirá como veremos a simetrías de la superficie, facilitando su trazado y manejo. Admitiendo que la plastificación depende sólo de la parte desviadora del tensor, la superficie de plastificación será un prisma recto cuyo eje es la trisectriz de los ejes coordenados. La representación plana de Haigh-Westergaard (epígrafe 2.7) contendrá por tanto toda la información relevante relativa a la plastificación. La forma de la sección del prisma será la que proponga cada criterio de plastificación particular. La primera figura 4.21 muestra la forma general de la superficie de plastificación. Se insiste en que la sección transversal del prisma, que se muestra en perspectiva isométrica en la segunda de las figuras 4.21, no tiene porqué ser circular. Pero sí debe cumplir ciertas condiciones: el que el material sea isótropo implica que la ordenación de los ejes principales es indiferente, por lo que en la última representación, los tres ejes coordenados serán de simetría de la sección, y habrá repetitividad cada  $120^\circ$ . Si además el material tiene idéntico comportamiento a tracción que a compresión, como supondremos, entonces debe tener centro de simetría en el origen de la representación isométrica. La repetitividad cada  $120^\circ$  y cada  $180^\circ$  implica que debe haber repetitividad cada  $60^\circ$  (el máximo común divisor de ambos valores). La segunda figura 4.21 muestra una forma de la sección del prisma coherente con los condicionantes anteriores, y con el requisito adicional de que la superficie sea convexa. La justificación de este último requisito se basa en el comportamiento en régimen plástico, y cae fuera del ámbito de este texto. La tercera figura 4.21 nos recuerda cómo trazar un punto P en la representación isométrica

dadas las tensiones principales, lo que le será útil si desea comprobar los argumentos de simetría expuestos en este párrafo.



**Figuras 4.21.-** Prototipo de superficie de plastificación.

Ocurre que, en realidad, el comportamiento similar en tracción y en compresión habitualmente observado en los metales, deja de serlo llegado cierto nivel de tensiones. En efecto, cuando las tres tensiones principales son de tracción y se hacen progresivamente mayores, llega un momento en que se produce "rotura frágil" del material (es decir, rotura sin plastificación previa). El prisma no será por tanto ilimitado, sino que estará acotado en la zona de tracciones por la "superficie de rotura", que es el lugar geométrico de los puntos del espacio de tensiones principales en que se produce la rotura del material. Esta superficie es independiente de la superficie de plastificación, ya que está asociada a un fenómeno distinto. En la figura 4.22 se muestra la manera en que la superficie de rotura intersectará típicamente a la de plastificación, haciendo perder todo significado a la zona de ésta que sobrepasa a aquella.



**Figura 4.22.-** Superficie de plastificación y superficie de rotura.

Para prevenir el riesgo de rotura frágil, las normas recomiendan habitualmente como condición de diseño que si las tres tensiones principales son de tracción, la mayor de ellas no sobrepase el valor  $2\sigma_e$ . Puede comprobarse que una limitación de este tipo equivale a postular que la superficie de rotura tiene forma puntiaguda triangular al aproximarse a la trisectriz. Por supuesto, la condición anterior se entiende como

adicional a la de que el estado de tensión sea interior a la superficie de plastificación según el criterio adoptado.

### Criterio de Tresca

El criterio de Tresca predice que la plastificación llegará cuando la tensión tangencial máxima en el punto alcance cierto valor. En apoyo de esta teoría está el hecho de que no contradice en lo fundamental ninguna de las evidencias experimentales que hemos comentado. Adicionalmente, cuando llega la plastificación en el ensayo de tracción, aparecen unas líneas en el material (líneas Lueder), a 45° de la dirección del eje de la barra. Esto sugiere que la tensión tangencial está asociada a la plastificación al menos en ese ensayo, ya que sus máximos ocurren precisamente a 45°. La máxima tensión tangencial es el máximo de los valores siguientes:

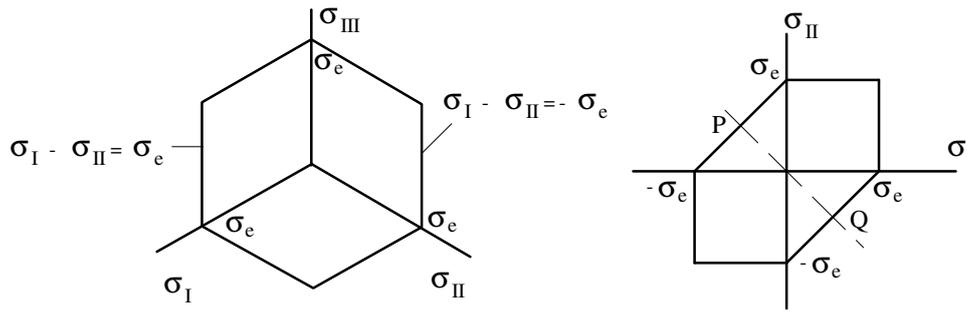
$$\left| \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \right| ; \left| \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \right| ; \left| \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2} \right| \quad (4.25)$$

Como valor de tensión tangencial de plastificación se toma el alcanzado en el ensayo de tracción. Como sabemos, en este ensayo la plastificación llega cuando la tensión normal vale  $\sigma_e$ , siendo la tensión tangencial máxima  $\tau^{\max} = \sigma_e/2$ . Por tanto el criterio de Tresca predice la plastificación cuando el máximo de las cantidades (4.25) alcanza el valor  $\sigma_e/2$ . Para el trazado de la superficie de plastificación es más cómodo considerar las condiciones límite por separado:

$$\sigma_I - \sigma_{II} = \pm \sigma_e ; \sigma_I - \sigma_{III} = \pm \sigma_e ; \sigma_{II} - \sigma_{III} = \pm \sigma_e \quad (4.26)$$

El trazado de los seis planos anteriores en la representación isométrica del espacio de tensiones principales se muestra en la primera figura 4.23. Como se aprecia, resulta una superficie de plastificación con forma de prisma de sección hexagonal, que cumple con los requisitos generales esperados para una superficie de plastificación.

Para juzgar la exactitud del criterio, consideremos el estado de tensión tangencial pura en el plano I-II (esto es  $\sigma_{II} = -\sigma_I$ , con  $\sigma_{III} = 0$ ), para el que los ensayos de Lode predicen la plastificación cuando  $\tau^{\max} = 0.56 \sigma_e$ . Este estado de tensión está representado por la línea PQ en la segunda figura 4.23, que muestra la sección de la superficie de plastificación por el plano  $\sigma_{III} = 0$ . El punto Q (o el P) es el punto en que el criterio de Tresca predice la plastificación en el estado de tensión tangencial pura. Como vemos, en este punto se tiene un valor de  $\sigma_I = 0.5 \sigma_e = \tau^{\max}$ . Nótese que en este caso el círculo de Mohr está centrado respecto de los ejes  $\sigma$ - $\tau$ , por lo que  $\tau^{\max} = \sigma_I$ . La aproximación de este factor 0.5 al valor 0.56 esperado puede considerarse como aceptable desde el punto de vista de la inmensa mayoría de las aplicaciones de ingeniería. Además, la discrepancia entre ambos valores situará del lado de la seguridad a los diseños efectuados en base a este criterio.



**Figuras 4.23.-** Superficie de plastificación según el Criterio de Tresca.

### Criterio de Von-Mises

Beltrami postuló que la plastificación llegaría cuando la densidad de energía de deformación ( $W$ , ver epígrafe 4.6) alcanzase cierto valor. El criterio basado en este postulado resultó discordante con los resultados experimentales de Lode. No obstante, la idea básica de asociar la plastificación a alguna magnitud energética resulta físicamente atractiva.

Nos interesará considerar el tensor de tensiones descompuesto en su parte desviadora y en su parte media. Descompondremos también la deformación en suma de tensor medio y tensor desviador de deformaciones, que se definen de forma similar a sus homólogos en tensiones. Es interesante apreciar que al ser lineal la ley de comportamiento, se cumple que las componentes del tensor medio de tensiones son las que se obtienen a partir de las componentes del tensor medio de deformaciones a través de la ley de comportamiento, y análogamente para los tensores desviadores. Podemos expresar la densidad de energía de deformación, ecuación (4.18), como:

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^m + \sigma_{ij}^d) (\epsilon_{ij}^m + \epsilon_{ij}^d) = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^m \epsilon_{ij}^m + \frac{1}{2} \sigma_{ij}^d \epsilon_{ij}^d + \frac{1}{2} \sigma_{ij}^d \epsilon_{ij}^m + \frac{1}{2} \sigma_{ij}^m \epsilon_{ij}^d$$

Puede comprobarse que los dos últimos términos de la ecuación anterior son nulos. Véase como ejemplo que el último de ellos puede escribirse:

$$\frac{1}{2} \frac{\sigma_{kk}}{3} \delta_{ij} \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ij}^d - \nu\sigma_{pp}^d \delta_{ij}] = \frac{\sigma_{kk}}{6E} [(1+\nu)\sigma_{ii}^d - 3\nu\sigma_{pp}^d] = 0$$

Que se anula al ser nulo el primer invariante de un tensor desviador ( $\sigma_{ij}^d = 0$ ). Por tanto, la densidad de energía de deformación admite la expresión:

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^m \epsilon_{ij}^m + \frac{1}{2} \sigma_{ij}^d \epsilon_{ij}^d \quad (4.27)$$

La expresión anterior hace cobrar sentido a la idea, en principio injustificada, de que  $W$  puede calcularse mediante superposición de la energía debida al tensor medio (de tensiones, con sus correspondientes deformaciones) más la debida al tensor desviador.

En relación con lo anterior, el lector debe quedar avisado de que los casos en que una energía puede calcularse por superposición de efectos son contadas excepciones. Debe recordarse que la energía *es una función no lineal* de las deformaciones (o de las tensiones), como se comentó tras la ecuación (4.18).

En todo caso, la expresión (4.27) permite concebir la densidad de energía de deformación como suma de las aportaciones debidas al tensor medio y al tensor desviador. Esto, junto con la indicación experimental de que la plastificación no depende de la adición de una presión hidrostática, la cual está asociada a los tensores medios, hace natural el concebir que la plastificación dependerá del valor de la densidad de energía debida al tensor desviador, es decir, del último término de (4.27) que llamaremos "energía de distorsión",  $W^d$ :

$$\begin{aligned} W^d &= \frac{1}{2} \sigma_{ij}^d \epsilon_{ij}^d = \frac{1}{2E} \sigma_{ij}^d \left[ (1+\nu) \sigma_{ij}^d - \nu \sigma_{kk}^d \delta_{ij} \right] = (\sigma_{kk}^d = 0) = \frac{1+\nu}{2E} \left( \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{pp}}{3} \delta_{ij} \right) \left( \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{kk}}{3} \delta_{ij} \right) \\ &= \frac{1+\nu}{2E} \left[ \sigma_{ij} \sigma_{ij} + \frac{\sigma_{pp}}{3} \frac{\sigma_{kk}}{3} \delta_{ii} - \frac{\sigma_{pp} \sigma_{ii}}{3} - \frac{\sigma_{ii} \sigma_{kk}}{3} \right] \end{aligned}$$

En el último corchete, el segundo término se cancela con el tercero (o con el cuarto). Para simplificar el desarrollo vamos a suponer por ahora que los ejes adoptados son ejes principales. La expresión anterior resulta:

$$W^d = \frac{1+\nu}{2E} \left[ \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - \frac{(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})^2}{3} \right] = \frac{1+\nu}{6E} \left[ (\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 \right]$$

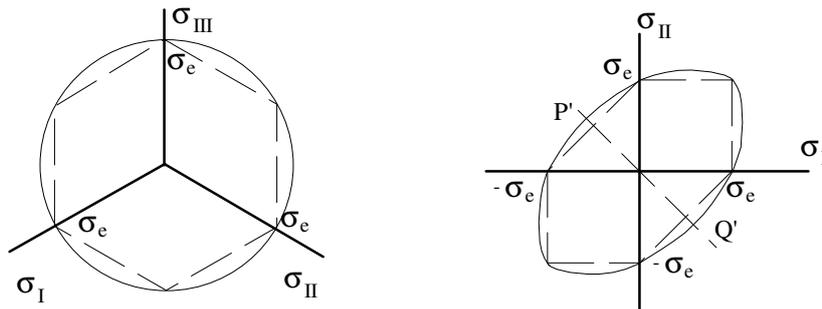
El criterio de Von-Mises propone que la plastificación ocurrirá cuando la expresión anterior alcance cierto valor. Nuevamente, se toma como referencia el ensayo de tracción para fijar ese valor. En este ensayo, sólo  $\sigma_I$  es distinto de cero, por lo que al llegar la plastificación tenemos:

$$W_{(\text{Ensayo Tr.})}^d = \frac{1+\nu}{6E} (2\sigma_I^2) = \frac{1+\nu}{6E} (2\sigma_e^2)$$

Que se adopta como valor límite que puede tomar  $W^d$  sin que el material plastifique. Con esto obtenemos la forma final del criterio de Von-Mises:

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 \leq 2\sigma_e^2 \quad (4.28)$$

Puede apreciarse que la representación de la ecuación anterior en el espacio de tensiones principales es un cilindro de sección circular cuyo eje está dirigido según la trisectriz de los ejes coordenados. Su representación en la perspectiva isométrica de Haigh-Westergaard se muestra en la primera figura 4.24. El cilindro asociado al criterio de Von-Mises es justamente el que circunscribe al prisma hexagonal de Tresca, que también se muestra en la figura, en línea de puntos.



**Figuras 4.24.-** Superficie de plastificación según el Criterio de Von-Mises.

Para juzgar el grado de verosimilitud del criterio compararemos nuevamente la predicción que ofrece para el estado de tensión tangencial pura con los resultados de Lode. La intersección de la superficie de plastificación con el plano  $\sigma_{III} = 0$  se muestra en la segunda de las figuras 4.24. Los estados de tensión tangencial pura se encuentran en la línea  $P'Q'$ , siendo el punto  $Q'$  (o el  $P'$ ) el que representa la plastificación según este criterio. Sustituyendo  $\sigma_{III} = 0$ ,  $\sigma_{II} = -\sigma_I$  en (4.28) obtenemos:

$$6\sigma_I^2 \leq 2\sigma_e^2 \Rightarrow \sigma_I \leq 0.577\sigma_e$$

Valor muy próximo al  $0.56\sigma_e$  encontrado experimentalmente por Lode. Podemos por tanto juzgar que el criterio de Von-Mises se ajusta satisfactoriamente a los resultados experimentales, si bien sus predicciones quedarán ligeramente fuera del lado de la seguridad. Este criterio, junto con el de Tresca, que a efectos prácticos es sensiblemente equivalente, es ampliamente utilizado para materiales metálicos. Históricamente, Von-Mises propuso en 1912 sustituir el prisma hexagonal de Tresca por el cilindro que le circunscribe sin más argumento que la sencillez de su manejo, y el que el nivel de precisión en la concordancia con los resultados experimentales no resultaba sensiblemente afectado, o en todo caso mejoraba. Fue Hencky quién doce años más tarde realizó la interpretación física en base a la energía de distorsión que hemos presentado aquí.

Para su aplicación práctica, conviene disponer de una expresión del criterio análoga a (4.28), pero respecto de ejes no principales cualesquiera. Para ello podríamos proceder a desarrollar directamente  $W^d$  en ejes no principales, pero es más elegante apreciar que el segundo invariante del tensor desviador de tensiones, que llamamos  $J_2$ , admite la siguiente expresión en ejes principales:

$$\begin{aligned} J_2 &= (\sigma_I - \sigma_{kk} / 3)(\sigma_{II} - \sigma_{kk} / 3) + (\sigma_I - \sigma_{kk} / 3)(\sigma_{III} - \sigma_{kk} / 3) + (\sigma_{II} - \sigma_{kk} / 3)(\sigma_{III} - \sigma_{kk} / 3) = \\ &= -\frac{1}{6} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2] \end{aligned}$$

Lo que se obtiene tras operaciones algebraicas rutinarias. Se aprecia que el segundo invariante es siempre negativo. Con el resultado anterior, la ecuación (4.61) puede escribirse como:

$$|J_2| = -J_2 \leq \frac{\sigma_e^2}{3} \quad (4.29)$$

Que expresa el criterio de Von-Mises en función del segundo invariante del tensor desviador. Esta forma del criterio es del tipo a la anunciada en (4.56), aunque eventualmente no aparece el tercer invariante del tensor desviador. El conseguir una expresión del criterio en función de las componentes de tensión en ejes no principales es inmediato a partir de (4.62), teniendo en cuenta que  $J_2$  es invariante frente a cambios de orientación de los ejes:

$$J_2 = \left| \begin{array}{cc} \sigma_{11} - s/3 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - s/3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \sigma_{11} - s/3 & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} - s/3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \sigma_{22} - s/3 & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} - s/3 \end{array} \right|$$

En donde  $s/3$  es la tensión media,  $\sigma_{kk}/3$ . Desarrollando la ecuación anterior obtenemos (nótese que los productos de las diagonales principales reproducen un cálculo formalmente análogo al que condujo a la expresión de  $J_2$  en ejes principales):

$$J_2 = -\frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2] - [\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2]$$

Sustituyendo lo anterior en (4.29) obtenemos la expresión del criterio de Von-Mises en función de tensiones no principales:

$$[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2] + 6[\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2] \leq 2\sigma_e^2 \quad (4.30)$$

---

#### Bibliografía:

- FUNG, Y.C., "Foundations of solid mechanics", Prentice-Hall  
 LUBLINER, J., "Plasticity theory", Maxwell Macmillan International Editors  
 PARIS, F., "Teoría de la Elasticidad", ETSII-Univ. Sevilla  
 DOBLARE, M., "Teoría de la Elasticidad lineal", ETSII-Univ. Zaragoza  
 WOODS, L.C., "On the local form of the second law of thermodynamics in continuum mechanics", Quarterly of applied mathematics 39, pp.119-126 (1981).  
 WOODS, L.C., "The bogus axioms of continuum mechanics", Bulletin of the institute of mathematics and its applications. 17, pp.98-102 (1981).