

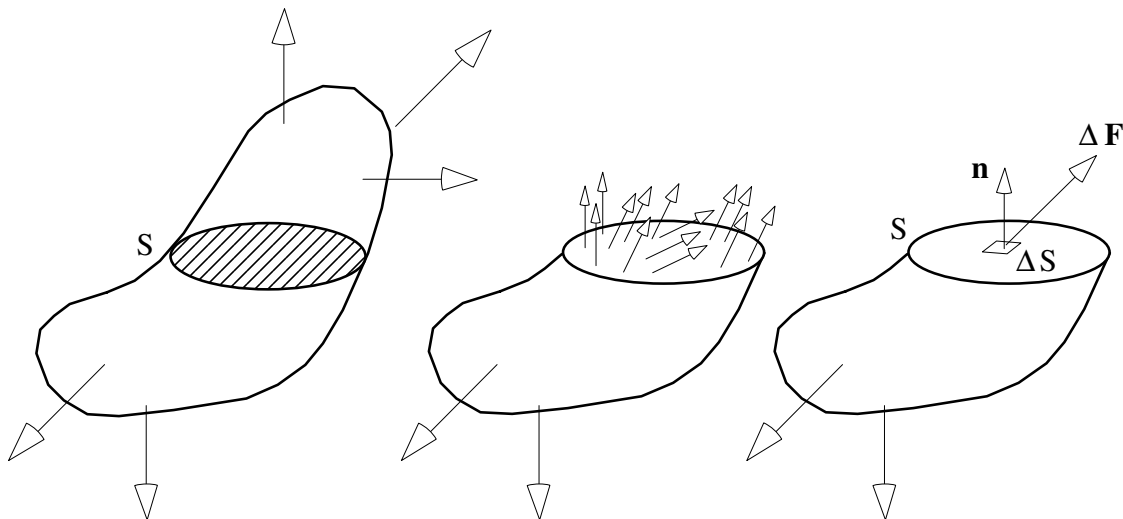
Capítulo 2

Tensión.

Para explicar cómo se transmiten a través del sólido las fuerzas aplicadas, es necesario introducir el concepto de tensión, que es probablemente el concepto físico más importante de toda la mecánica de los medios continuos, y de la teoría de la elasticidad en particular. Este capítulo presenta al lector el concepto de tensión junto con su caracterización matemática como tensor, y algunas de sus propiedades más importantes.

2.1.- Concepto de tensión: vector tensión.

Consideremos un sólido en equilibrio estático bajo la acción de fuerzas, como muestra la primera figura 2.1. Por conveniencia consideraremos dos tipos distintos de fuerzas: "fuerzas de superficie" y "fuerzas de volumen". Las fuerzas de superficie son distribuciones de fuerzas (o fuerzas puntuales) que actúan sobre la superficie del sólido considerado, las cuales pueden por ejemplo estar producidas por el contacto con otro sólido. Las fuerzas de volumen, que no necesitaremos considerar hasta el epígrafe 2.3, actúan sobre el interior del sólido (por ejemplo la gravedad). Tienen unidades de fuerza por unidad de superficie y de fuerza por unidad de volumen, respectivamente.



Figuras 2.1.- Porción de un sólido en equilibrio.

Consideremos una porción cualquiera del sólido, como por ejemplo la que se obtendría al cortar el mismo por una superficie continua S según se indica en la segunda figura 2.1. Cada porción del sólido que podamos considerar estará en equilibrio

asumiendo que en el corte imaginario realizado actúan las mismas acciones que ejercía en él el resto del sólido. Admitiremos el postulado de que estas acciones en el corte están representadas mediante una cierta distribución continua de fuerzas, como muestra la segunda de las figuras 2.1, sin momentos concentrados ni distribución de momentos. Esta distribución de fuerzas tiene unidades de presión (fuerza por unidad de superficie), si bien su dirección no será en general perpendicular a la superficie S . El postulado de que existe en cualquier superficie continua S una distribución también continua de fuerzas estáticamente equivalente a la acción que ejerce el material existente en el otro lado de la superficie S , constituye el concepto de tensión de Cauchy, y es la hipótesis fundamental de la mecánica de medios continuos.

Definimos como vector tensión en un punto de la superficie S el valor (vectorial) de la distribución de fuerzas en ese punto.

Debe apreciarse que en general el vector tensión no es único en un punto del sólido, ya que variará con la orientación de la superficie S que pase por el punto. Denotaremos como \mathbf{n} al vector unitario normal a la superficie S en el punto considerado, que tomaremos en el sentido exterior a la porción de sólido analizada. Denotaremos como $\mathbf{T}^{\mathbf{n}}$ el valor de la distribución de fuerzas, es decir, el vector tensión. Así, el superíndice \mathbf{n} indica que la superficie S tiene normal exterior \mathbf{n} en el punto considerado (tercera de las figuras 2.1).

Es inmediato calcular la resultante de las fuerzas (tensiones) que actúan en un elemento de la superficie S . Dado que hemos supuesto que esta distribución de fuerzas es continua, podemos reducir las fuerzas que actúan sobre un elemento muy pequeño de superficie ΔS , a su resultante $\Delta \mathbf{F}$ aplicada en el centro de áreas de ΔS . La reducción anterior se realiza dentro de la aproximación de que la distribución de fuerzas mantendrá dirección y módulo sensiblemente constantes en todo ΔS (un sistema de vectores que no sean paralelos no podría en general reducirse sólo a su resultante). Cuando ΔS tiende a un valor indefinidamente pequeño dS , la resultante $d\mathbf{F}$ tendrá un valor:

$$d\mathbf{F} = \mathbf{T}^{\mathbf{n}} dS \quad (2.1)$$

Llamaremos componentes intrínsecas del vector tensión a sus proyecciones sobre la dirección normal a la superficie S (dada por \mathbf{n}), y sobre el plano tangente a la superficie, que será perpendicular a \mathbf{n} , como indica la figura 2.2. En general estaremos interesados en conocer los siguientes valores escalares asociados a estas proyecciones:

$$\sigma = \mathbf{T}^{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} = T_1^{\mathbf{n}} n_1 \quad (2.2)$$

$$\tau^2 = |\mathbf{T}^{\mathbf{n}}|^2 - \sigma^2 \quad (2.3)$$

Llamaremos a σ componente normal y a τ componente tangencial. En las fórmulas anteriores es inmediato apreciar que σ está calculado como un escalar con signo, ya que es el resultado de un producto escalar de vectores. El convenio de signos que deriva de este cálculo es que σ es positivo si la proyección del vector tensión sobre la dirección normal a S tiene el sentido de \mathbf{n} (diremos que la componente normal es de tracción en

este caso). El procedimiento de cálculo (2.3) para la componente tangencial indica que el signo del escalar τ es indiferente. De hecho, no adoptaremos ningún convenio de signos para τ , excepto en el ámbito del diagrama de Mohr para problemas bidimensionales, que estudiaremos más tarde en este capítulo. Lo anterior es independiente de que hayamos definido un convenio de signos *para las componentes del tensor de tensiones*, en particular para las tangenciales.

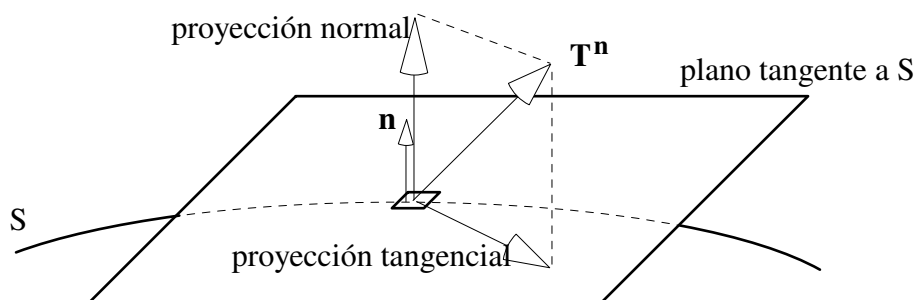
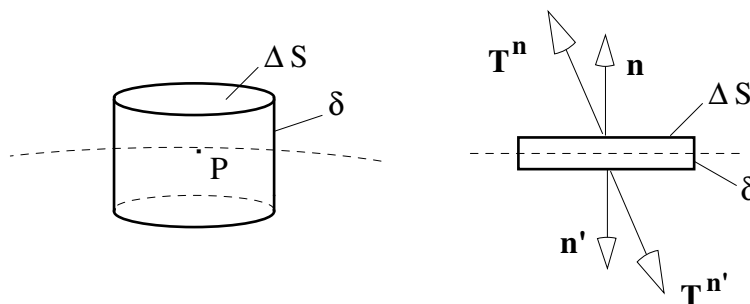


Figura 2.2.- Componentes intrínsecas del vector tensión.

Los vectores tensión en un punto según una superficie de corte S , y considerando las porciones de sólido a uno y otro lado del corte, son iguales en módulo y dirección, y de sentido opuesto. Esta propiedad puede considerarse una consecuencia directa del principio de acción y reacción de Newton, aunque cabe realizar una comprobación adicional basada en un razonamiento de equilibrio: consideremos aislado del seno de un sólido un pequeño cilindro de base ΔS y altura δ que contiene al punto P , y cuyas caras son paralelas al plano tangente a la superficie S , como indica la primera figura 2.3.



Figuras 2.3.- Equilibrio de un cilindro elemental.

Sobre las caras planas del sólido considerado actuarán las tensiones \mathbf{T}^n y $\mathbf{T}^{n'}$, y sobre cada punto de la superficie lateral cilíndrica existirá un cierto vector tensión, variable al variar la orientación del plano tangente al cilindro. Adicionalmente consideraremos la existencia de fuerzas de volumen, tales como la acción de la gravedad. Al hacer tender a cero la altura δ del cilindro de manera que P se mantenga dentro de él, la superficie lateral tiende a cero y las tensiones en esta superficie producirán fuerzas de magnitud despreciable frente a las correspondientes a \mathbf{T}^n y $\mathbf{T}^{n'}$, que actúan sobre superficies que no tienden a cero. Las fuerzas de volumen también serán despreciables, puesto que el volumen del sólido tiende a cero con δ . Por tanto, sólo quedan como magnitudes significativas las tensiones \mathbf{T}^n y $\mathbf{T}^{n'}$, que producirán

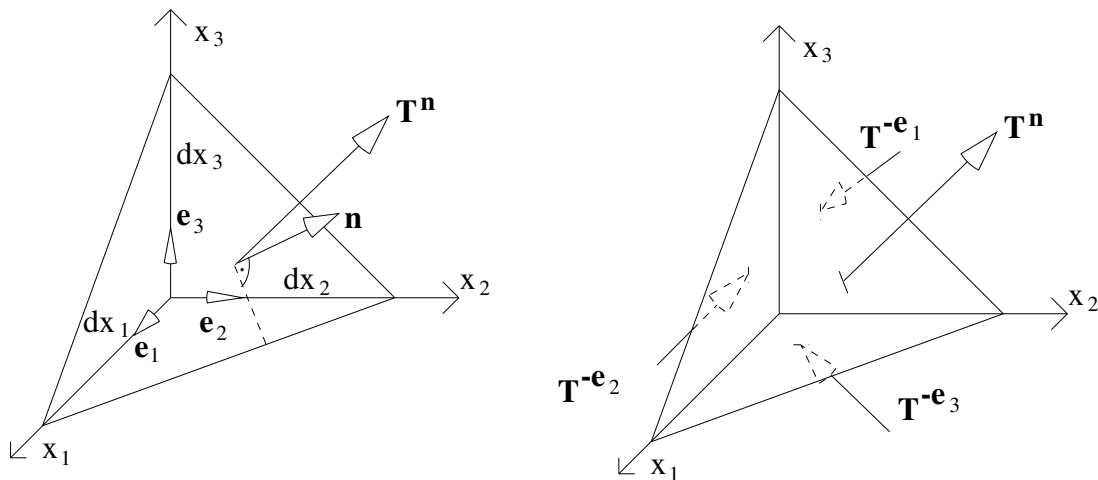
fuerzas $\mathbf{T}^{\mathbf{n}}\Delta S$ y $\mathbf{T}^{\mathbf{n}'}\Delta S$ respectivamente. Del planteamiento del equilibrio del sólido que hemos aislado se tiene:

$$\mathbf{T}^{\mathbf{n}}\Delta S + \mathbf{T}^{\mathbf{n}'}\Delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}^{\mathbf{n}} = -\mathbf{T}^{\mathbf{n}'} \quad (2.4)$$

lo que plasma el esperado resultado de que en un punto P, el vector tensión en un plano de normal exterior $\mathbf{n}' = -\mathbf{n}$ es opuesto al que se da en el de normal exterior \mathbf{n} .

2.2.- Tensor de tensiones.

Consideremos el equilibrio de un sólido diferencial con forma de tetraedro (extraído del seno de un sólido finito) como el mostrado en las figuras 2.4, cuyas caras están definidas por los tres planos coordenados y una cara oblicua de normal \mathbf{n} . En alguna posición dentro del tetraedro -no importa donde-, se encuentra un punto P, en el que los vectores tensión según planos paralelos a los coordenados valen $\mathbf{T}^{-\mathbf{e}_1}; \mathbf{T}^{-\mathbf{e}_2}; \mathbf{T}^{-\mathbf{e}_3}$ (especificamos el sentido negativo de cada \mathbf{e}_i por tener esa orientación la normal exterior a cada una de las tres superficies). Llamaremos $\mathbf{T}^{\mathbf{n}}$ al vector tensión en el plano de normal \mathbf{n} que pasa por P. Las superficies del tetraedro tendrán unas tensiones iguales a las anteriores salvo un diferencial, puesto que las distancias de P a estas superficies son diferenciales de primer orden. Tomaremos pues como aproximación de los valores de los vectores tensión en las caras de tetraedro los valores en planos paralelos a ellas que pasan por P. En el límite, esta aproximación no introducirá error al plantear el equilibrio, a no ser que se produjese una eventual cancelación de los términos finitos del desarrollo en serie de las tensiones (los correspondientes a la tensión en P, citados anteriormente), lo que no sucederá en este caso como veremos. Al no cancelarse estos términos finitos de tensión, las fuerzas de superficie en el tetraedro (diferenciales de segundo orden = tensión finita por superficie diferencial) dominarán sobre las fuerzas de volumen (diferenciales de tercer orden), que consecuentemente despreciaremos.



Figuras 2.4.- Equilibrio de un tetraedro elemental del seno de un sólido.

Caracterizaremos la magnitud de una superficie mediante un escalar positivo. Si la cara oblicua del tetraedro tiene una superficie dS , la cara paralela al plano 23 tendrá una superficie $n_1 dS$, la paralela al plano 31 será $n_2 dS$, y la paralela a 12 será $n_3 dS$. Nótese que tal como se ha considerado \mathbf{n} en la figura 2.4, todas sus componentes n_i son positivas, por lo que no es necesaria ninguna corrección de signo en el cálculo de las superficies anteriores. La ecuación de equilibrio de fuerzas se expresará como:

$$\mathbf{T}^{-e_1} n_1 dS + \mathbf{T}^{-e_2} n_2 dS + \mathbf{T}^{-e_3} n_3 dS + \mathbf{T}^n dS = 0$$

Dividiendo la ecuación anterior por dS , y teniendo en cuenta que $\mathbf{T}^{-e_j} = -\mathbf{T}^{e_j}$, resulta $\mathbf{T}^{e_j} n_j = \mathbf{T}^n$ (entendemos sumatorio en j). La igualdad vectorial anterior puede expresarse en componentes como:

$$T_i^n = T_i^{e_j} n_j \quad (2.5)$$

La ecuación (2.5) anterior es un resultado muy interesante. Por una parte, asegura que podemos calcular la tensión en cualquier plano de normal \mathbf{n} que pase por un punto, si conocemos las tensiones en planos paralelos a los coordenados que pasen por ese punto. Por otra parte, la estructura formal de la ecuación sugiere que la magnitud $T_i^{e_j}$ que tiene dos subíndices (i, j) será un tensor. En efecto, la regla del cociente nos asegura que será un tensor si tanto T_i^n como n_j son vectores (evidentemente lo son), y la ecuación se cumple para cualquier vector \mathbf{n} arbitrario. Hemos de cerciorarnos de esto último, dado que en proceso de obtención de la fórmula hicimos intervenir el hecho accidental de que las componentes de \mathbf{n} fuesen positivas. Con este fin, podemos comprobar que la ecuación de equilibrio mantiene la forma general (2.5) para un tetraedro en el que la cara oblicua tenga una normal exterior \mathbf{n}' con todas sus componentes negativas (figura 2.5).

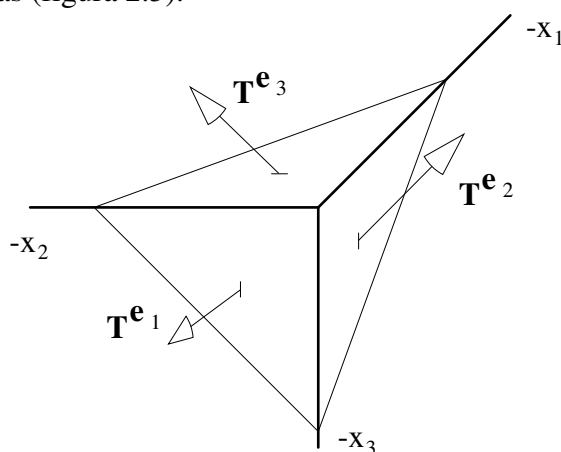


Figura 2.5.- Tetraedro con componentes negativas de la normal \mathbf{n}' a la cara oblicua.

En este caso, la cara paralela al plano 23 tendrá una superficie $-n'_1 dS$, la paralela al plano 31 será $-n'_2 dS$, y la paralela a 12 será $-n'_3 dS$. El signo menos se introduce para que las áreas se calculen siempre como cantidades positivas. El equilibrio de fuerzas vendrá expresado como

$$\mathbf{T}^{e_1} (-n'_1 dS) + \mathbf{T}^{e_2} (-n'_2 dS) + \mathbf{T}^{e_3} (-n'_3 dS) + \mathbf{T}^n dS = 0$$

Dividiendo la ecuación anterior por dS , resulta inmediatamente que $T_i^n = T_i^{e_j} n'_j$. Por lo tanto, la forma de la ecuación (2.5) se mantiene aunque las componentes de \mathbf{n} sean negativas. Es inmediato comprobar que ocurre lo mismo cuando \mathbf{n} está contenido en cualquier otro octante, ya que para una componente negativa n_j siempre habrá que realizar el ajuste de signo del área, y considerar la tensión T^{+e_j} en el plano coordenado correspondiente.

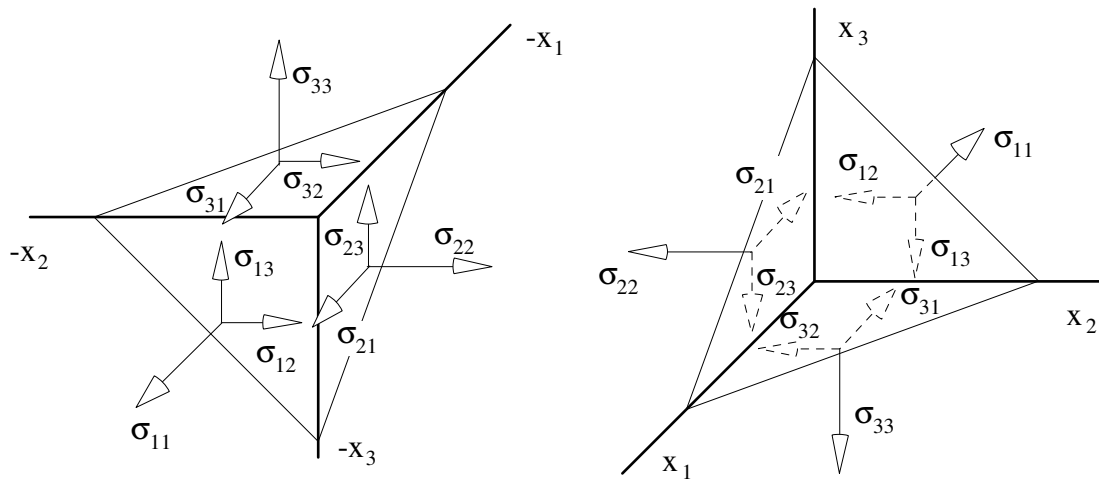
Realizada la comprobación anterior, podemos asegurar que (2.5) implica que el conjunto de cantidades $T_i^{e_j}$ son las componentes de un tensor, que denominaremos tensor de tensiones y denotaremos como σ_{ji} :

$$\sigma_{ji} = T_i^{e_j} \quad (2.6)$$

Con esta notación, el primer subíndice de σ_{ji} indica qué eje es perpendicular al plano donde actúa la componente de tensión, y el segundo subíndice indica la dirección de la componente de tensión. La ecuación de equilibrio de un tetraedro elemental (2.5) se escribe en función del tensor de tensiones como:

$$T_i^n = \sigma_{ji} n_j \quad (2.7)$$

Conviene enfatizar que las componentes del tensor de tensiones se definen según (2.6) en base a las componentes de los vectores tensión en planos paralelos a los coordenados *cuya normal exterior tiene el sentido positivo del eje correspondiente*. Por lo tanto, todas las componentes del tensor de tensiones que muestra la primera de las figuras 2.6 son positivas tal como están dibujadas.



Figuras 2.6.- Componentes positivas del tensor de tensiones.

Si conocemos las componentes del vector tensión en un punto sobre un plano cuya normal exterior está dirigida en sentido opuesto a un eje coordenado, y queremos saber el signo de las componentes correspondientes del tensor de tensiones en ese punto, debemos calcular primero las componentes del vector tensión en el mismo plano pero con normal exterior en el sentido positivo del eje (este "cálculo" consiste simplemente en cambiar de signo las componentes del vector tensión, según la ecuación (2.4)), e

identificar las componentes de este último vector tensión con las componentes correspondientes del tensor de tensiones. Por lo tanto, diremos que si las componentes de tensión están dirigidas según se muestra en el sólido de la segunda de las figuras 2.6, éstas son también positivas. Podemos resumir que:

Una componente de tensión es positiva si tiene el sentido de un eje y la normal al plano sobre el que actúa tiene el sentido de un eje, o si tiene sentido contrario a un eje y la normal al plano tiene sentido a un eje. Es negativa en otro caso.

2.3.- Ecuaciones de equilibrio.

Al comienzo de la sección 2.1 propusimos la consideración de dos tipos de fuerzas actuantes: fuerzas de volumen y fuerzas de contorno. Denotaremos mediante X_i las fuerzas asociadas al volumen del sólido y \bar{X}_i a las asociadas a su superficie exterior. La ecuación de equilibrio local en función de los términos del tensor de tensiones en un punto de la superficie del sólido será la misma ecuación (2.7), pero considerando que \mathbf{n} es la normal exterior al contorno real del sólido. La ecuación que resulta, a la que llamaremos ecuación de equilibrio en el contorno, es:

$$\bar{X}_i = \sigma_{ji} n_j \quad (2.8)$$

Plantearémos ahora el equilibrio de un sólido diferencial con forma de cubo de aristas paralelas a los ejes, aislado del seno de un sólido macroscópico. La figura 2.7 muestra un sólido diferencial de este tipo.

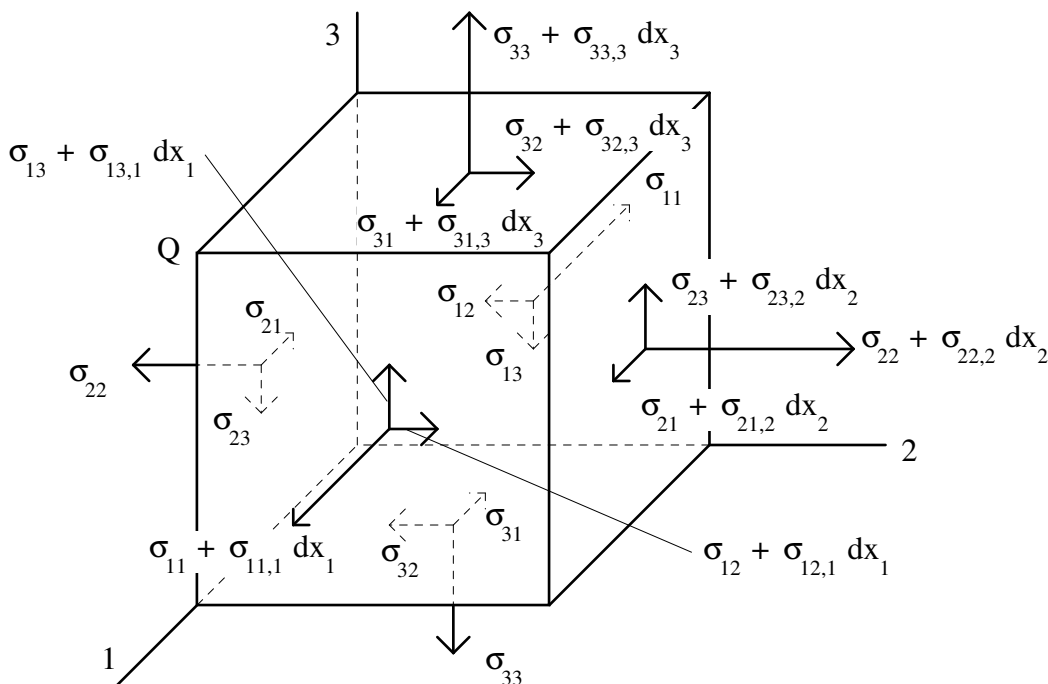


Figura 2.7.- Tensiones en un cubo elemental de aristas paralelas a los ejes. En él se han dibujado (supuestas positivas) las componentes del tensor de tensiones sobre sus caras. Una componente de tensión, por ejemplo la 22, no tendrá exactamente

el mismo valor en la cara $x_2=0$ (en la que diremos que vale σ_{22}) que en la cara $x_2=dx_2$, habiéndose representado en la figura 2.7 el valor dado por su desarrollo en serie truncado al segundo término. El lector debe observar en la siguiente exposición que los diferenciales primeros del desarrollo en serie de las tensiones cobran una importancia que no tenían en el ámbito de la ecuación (2.5), debido a que ahora los primeros términos (con tensiones finitas) de estos desarrollos se cancelan exactamente al plantear el equilibrio. Imponiendo por ejemplo que la suma de fuerzas según la dirección 2 sea cero, tenemos:

$$(-\sigma_{22} + \sigma_{22,2} dx_2) dx_1 dx_3 + (-\sigma_{12} + \sigma_{12,1} dx_1) dx_2 dx_3 + (-\sigma_{32} + \sigma_{32,3} dx_3) dx_1 dx_2 + X_2 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

Tras cancelar las cantidades σ_{22} , σ_{12} y σ_{32} en el interior de cada paréntesis respectivo, y dividir por $dx_1 dx_2 dx_3$, el resultado adopta la forma $\sigma_{j2,j} + X_2 = 0$. Las ecuaciones que expresan el equilibrio de fuerzas en las otras dos direcciones, 1 y 3, se obtienen análogamente y presentan la misma forma. Podemos por tanto expresar estas tres ecuaciones en la forma compacta:

$$\sigma_{ji,j} + X_i = 0 \quad (2.9)$$

El equilibrio del sólido implica también que el momento de las fuerzas que actúan sobre él respecto de cualquier punto debe ser nulo. Tomemos momentos respecto del punto Q de la figura 2.7. Según la dirección 2, por ejemplo, aparecen los momentos producidos por las tensiones σ_{31} y σ_{13} , de valor $(\sigma_{31} dx_1 dx_2) dx_3$, y $-(\sigma_{13} dx_2 dx_3) dx_1$, respectivamente (tomamos como positivas las componentes de momento dirigidas en el sentido del eje). Los momentos producidos por las demás componentes de tensión son infinitésimos de orden superior que despreciaremos: por ejemplo las tensiones σ_{11} producirían un momento:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{11} - \sigma_{11,1} dx_1) (dx_2 dx_3) (dx_3/2) = -\sigma_{11,1} dx_1 dx_2 dx_3 dx_3/2,$$

que es un diferencial de cuarto orden. Por tanto, salvo estos diferenciales de orden superior a tres, la ecuación de suma de momentos según la dirección 2 queda:

$$(\sigma_{31} dx_1 dx_2) dx_3 - (\sigma_{13} dx_2 dx_3) dx_1 = 0,$$

Es decir $\sigma_{31} = \sigma_{13}$. Al imponer que el momento sea nulo en las otras dos direcciones, 1 y 3, se obtiene análogamente la igualdad de las componentes de tensión tangencial de subíndices 23 y 12, respectivamente. Estas tres ecuaciones se resumen por tanto en:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.10)$$

Que expresa que el tensor de tensiones es simétrico. En la literatura aparece a veces el término "principio de reciprocidad de las tensiones tangenciales", cuyo enunciado es que las componentes de tensión tangencial perpendiculares entre sí, que actúan sobre dos planos también perpendiculares entre sí, son iguales en módulo, y tienen sentidos convergentes o bien divergentes (figura 2.8). Por supuesto, se trata de la misma

propiedad de simetría expresada en (2.10). Hay que notar que si existiese una distribución de momentos por unidad de volumen, aportaría un momento diferencial de tercer orden que modificaría la ecuación de equilibrio (2.10), perdiéndose la simetría del tensor de tensiones. Tales distribuciones de momentos pueden ser importantes en presencia de campos electromagnéticos extraordinariamente intensos, siendo despreciables en la inmensa mayoría de las aplicaciones prácticas.

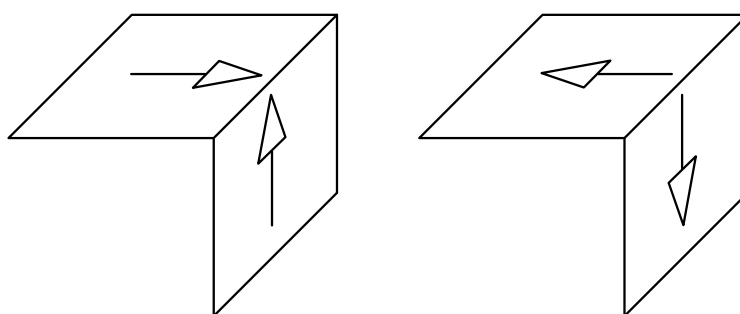


Figura 2.8.- Reciprocidad de las tensiones tangenciales.

Las ecuaciones (2.9) y (2.10) expresan el equilibrio del sólido elemental de la figura 2.7. Podemos utilizar la (2.10) para reescribir las ecuaciones (2.7), (2.8), y (2.9) en la forma en que las usaremos en lo sucesivo. El vector tensión en un punto interior al sólido, y en un punto del contorno del sólido según su superficie, son respectivamente:

$$T_i^n = \sigma_{ij}n_j \quad (2.11)$$

$$\bar{X}_i = \sigma_{ij}n_j \quad (2.12)$$

Donde n_j denota las componentes del vector normal al plano adecuado en cada caso. La ecuación de equilibrio interno queda:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad (2.13)$$

2.4.- Tensiones y direcciones principales. Su carácter invariante.

Nos preguntamos si dado un punto arbitrario del sólido existirá algún plano (de normal \mathbf{n}) en el que el vector tensión sea perpendicular al plano, y por tanto paralelo a \mathbf{n} . Podemos enunciar equivalentemente la pregunta de si habrá planos en que la componente tangencial τ del vector tensión sea nula. Seguidamente demostraremos que efectivamente siempre existen planos que cumplen esta propiedad. A las direcciones perpendiculares a estos planos se las denomina "direcciones principales". Se llama "tensiones principales" a los valores escalares de la tensión normal en estos planos, en que la tensión es puramente normal.

Sea σ_{ij} el tensor de tensiones en el punto considerado. Sea \mathbf{n} el vector unitario normal a un plano de tensión puramente normal que pasa por el punto, y sea σ (escalar) el valor de la tensión normal en ese plano. La condición de que el vector tensión que actúa sobre el plano tiene la dirección \mathbf{n} , viene dada por:

$$T_i^n = \sigma n_i$$

Expresando el vector tensión en función de los términos del tensor de tensiones mediante (2.11), obtenemos:

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma n_i \quad (2.14)$$

O lo que es lo mismo, $(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0$, que tiene la forma de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales que en forma explícita es:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.15)$$

Para que el sistema de ecuaciones anterior tenga una solución no trivial en n_1, n_2, n_3 , el determinante de la matriz de coeficientes debe ser nulo:

$$|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0 \quad (2.16)$$

La ecuación (2.16) define un polinomio cúbico en σ , que llamaremos ecuación característica, y que escribiremos en la siguiente forma normalizada:

$$-\sigma^3 + I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma + I_3 = 0 \quad (2.17)$$

Los coeficientes, I_1, I_2, I_3 , se calculan inmediatamente mediante identificación con el desarrollo del determinante de (2.16). Sus valores son:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

La ecuación característica (2.17) tendrá tres soluciones en σ , que denotaremos como σ_I, σ_{II} y σ_{III} , y que serán las tensiones principales. Más tarde demostraremos que las tres tensiones principales serán siempre números reales. Cada uno de estos valores es la tensión normal en uno de los planos en que la tensión es puramente normal. Las orientaciones $\mathbf{n}^I, \mathbf{n}^{II}$, y \mathbf{n}^{III} , de las normales a estos planos pueden obtenerse particularizando en la ecuación inicial (2.15) σ_I, σ_{II} y σ_{III} respectivamente como valores de σ :

$$(\sigma_{ij} - \sigma_I \delta_{ij}) n_j^I = 0 \quad (\sigma_{ij} - \sigma_{II} \delta_{ij}) n_j^{II} = 0 \quad (\sigma_{ij} - \sigma_{III} \delta_{ij}) n_j^{III} = 0 \quad (2.18)$$

Donde I, II, III son índices fijos que no indican sumatorio. Cada uno de los tres sistemas de ecuaciones (2.18), en los que las incógnitas son las componentes de los respectivos vectores según las direcciones principales, tiene matriz de coeficientes singular (véase ecuación (2.16)). Por ello hemos de plantear alguna ecuación adicional para encontrar su solución. En general es suficiente descartar una de las ecuaciones de cada sistema de 2.18 (que será combinación lineal de las otras dos), e imponer a cambio la correspondiente condición adicional (2.19), que expresa que el módulo del vector que buscamos es la unidad.

$$(n_1^I)^2 + (n_2^I)^2 + (n_3^I)^2 = n_1^I n_1^I = 1 \quad n_1^{II} n_1^{II} = 1 \quad n_1^{III} n_1^{III} = 1 \quad (2.19)$$

Las ecuaciones (2.17), (2.18) y (2.19) permiten en general encontrar la orientación de los planos que no tienen tensión tangencial, así como el valor de la tensión normal σ correspondiente. Demostraremos más tarde que a raíces σ distintas de la ecuación característica corresponden direcciones principales distintas, y que las direcciones principales son perpendiculares entre sí. Esta última circunstancia nos ofrece la posibilidad de adoptar un sistema de ejes coordenados cuyas direcciones coincidan con las principales, resultando evidente que, por definición, las componentes tangenciales del tensor de tensiones se anularán en estos ejes, con lo que la matriz asociada al tensor tiene forma diagonal:

$$\sigma_{i,j'} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \quad (\text{cuando los ejes } 1',2',3' \text{ coinciden con las direcciones principales})$$

Demostración del carácter invariante de las direcciones y tensiones principales.

Si las tensiones y direcciones principales en un punto, solución de (2.14), dependieran del sistema de ejes adoptado, serían propiedades sin demasiado interés, y no tendría sentido por ejemplo hablar de adoptar ejes según direcciones principales, como acabamos de hacer. La intuición física nos dice que no se dará esta dependencia, ya que los planos principales en un punto son planos en los que físicamente ocurre algo tangible (la ausencia de tensión tangencial), y la tensión principal es una medida asociada a ese algo. No obstante, nos proponemos presentar una demostración formal de la invarianza de tensiones y direcciones principales respecto del sistema de ejes adoptado.

Para ello, consideremos la ecuación inicial (2.14) aplicada en un punto del sólido, y referida a dos sistemas de ejes distintos. Supondremos que en ambos sistemas de ejes los valores principales de tensión pueden ser distintos (σ y σ'), así como las direcciones principales (que notaremos n_i y $v_{i'}$). Realizaremos la demostración mostrando que, tras las manipulaciones adecuadas, la forma de (2.14) es la misma en ambos sistemas de ejes. Por tanto partimos de:

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma n_i \quad \sigma_{i'j'} v_{j'} = \sigma' v_{i'} \quad (2.20)$$

Multiplicando a la primera ecuación anterior por a_{ii}' (podemos hacerlo, ya que la matriz que la representa tiene inversa):

$$a_{ii}' \sigma_{ij} n_j = a_{ii}' \sigma n_i$$

Agrupamos términos del miembro derecho, y hacemos aparecer n_j' en el izquierdo:

$$a_{ii}' \sigma_{ij} (a_{jj}' n_j') = \sigma n_i'$$

Como σ_{ij} y $\sigma_{i'j'}$ representan al mismo tensor, cumplen la relación de transformación (1.19), por lo que agrupando términos resulta:

$$\sigma_{i'j'} n_j' = \sigma n_i'$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la segunda de las ecuaciones (2.20). Es inmediato apreciar que la ecuación característica que resulta de ambas es la misma, lo que implica que las soluciones de σ y σ' coincidirán, y que una vez sustituidas éstas (en la ecuación anterior y en la segunda (2.20)), se obtendrán soluciones coincidentes para n_i' y para v_i' , con lo que queda demostrada la invarianza de las direcciones y tensiones principales respecto del sistema de ejes coordenados adoptado.

El que el valor de las tensiones principales sea independiente del sistema de ejes, implica automáticamente que el valor de los coeficientes de la ecuación característica (2.17) debe ser también invariante frente a cambios de ejes. Por esto se llama a estos coeficientes "invariantes del tensor de tensiones". En particular, y por razones obvias, se llama primer invariante o invariante lineal a I_1 , segundo invariante o invariante cuadrático a I_2 , y tercer invariante o invariante cúbico a I_3 .

Demostración de que las soluciones de la ecuación característica son números reales.

La ecuación característica (2.16) es un polinomio con coeficientes reales, por lo que sabemos que puede tener raíces reales y pares de raíces complejas conjugadas. Como el polinomio es de tercer grado tendrá tres raíces, por lo que al menos una será siempre real. Sea σ_I el valor de esta raíz real, y sea \mathbf{n}^I el vector unitario en la dirección principal asociada a esta raíz. Elegiremos un sistema de ejes $x_1 x_2 x_3$ de tal manera que x_1 coincida con esta dirección. Las componentes de tensión σ_{12} y σ_{13} serán evidentemente nulas en estos ejes, siendo el tensor de tensiones de la forma que se muestra en la figura 2.9.

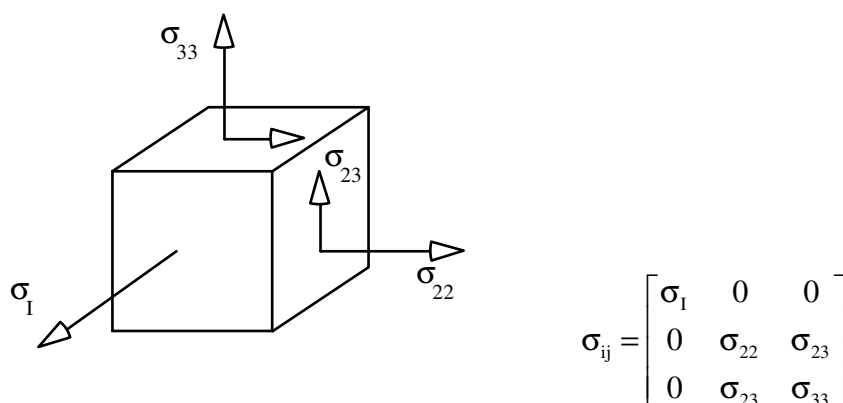


Figura 2.9.- Tensor de tensiones cuando x_1 coincide con una dirección principal.

La ecuación característica adopta la forma:

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Siendo sus soluciones la ya conocida $\sigma = \sigma_1$, y las dos raíces de

$$\sigma^2 - (\sigma_{22} + \sigma_{33})\sigma + (\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2) = 0$$

Esta ecuación de segundo grado tiene sus raíces reales siempre que su discriminante Δ sea mayor que cero, lo cual ocurrirá siempre, ya que puede expresarse como suma de cuadrados:

$$\Delta = (\sigma_{22} + \sigma_{33})^2 - 4(\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2) = (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 4\sigma_{23}^2 \geq 0$$

Por lo tanto, las tres tensiones principales deben ser números reales, como queríamos demostrar.

Demostración de que tensiones principales distintas llevan asociadas direcciones principales distintas

Supongamos que pasando por un punto existen dos planos, de normales \mathbf{n}_i y \mathbf{v}_i , en los que el vector tensión tiene solamente componente normal a su plano, de valores σ y σ' respectivamente. Siendo σ_{ij} el tensor de tensiones en ese punto se cumplirá:

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma n_i \qquad \sigma_{ij} v_j = \sigma' v_i \qquad (2.21)$$

Asumamos que $\sigma \neq \sigma'$. Para comprobar que sus direcciones principales asociadas, \mathbf{n} y \mathbf{v} no pueden coincidir, observemos que si coincidieran ($\mathbf{v}=\mathbf{n}$) podríamos obtener la siguiente ecuación mediante sustracción de las ecuaciones (2.21):

$$0 = (\sigma - \sigma') n_i$$

La cual no puede satisfacerse para ninguna dirección \mathbf{n} , a no ser que sea $\sigma = \sigma'$. Por lo tanto, la coincidencia de las direcciones principales \mathbf{n} y \mathbf{v} solo puede darse cuando sus tensiones principales asociadas σ y σ' , también coinciden, como queríamos demostrar.

Demostración de que las direcciones principales son perpendiculares entre sí.

Supongamos nuevamente que en un punto existen dos planos, de normales \mathbf{n} y \mathbf{v} , en los que el vector tensión tiene solamente componente normal, de valores σ y σ' respectivamente, lo que permite plantear otra vez las ecuaciones (2.21). Multiplicando escalarmente a la primera de estas ecuaciones por \mathbf{v} , a la segunda por \mathbf{n} , y restando, obtenemos:

$$\sigma_{ij} n_j v_i - \sigma_{ij} v_j n_i = \sigma n_i v_i - \sigma' v_i n_i$$

Intercambiando los subíndices mudos del segundo término del primer miembro, y teniendo en cuenta que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, tenemos:

$$\sigma_{ij} n_j v_i - \sigma_{ij} n_j v_i = (\sigma - \sigma') v_i n_i$$

El primer miembro es evidentemente nulo. Hay dos maneras de que el segundo miembro satisfaga esta igualdad a cero: que se anule $(\sigma - \sigma')$ o bien que se anule $v_i n_i$. La primera de las soluciones, $(\sigma - \sigma')=0$, claramente no es una solución general, ya que los valores de dos tensiones principales no tienen porqué coincidir (aunque eventualmente *pueden* coincidir, lo que constituye un caso particular que analizaremos más adelante). Por lo tanto, en el caso general en el que la ecuación característica no tiene raíz doble, debe ser:

$$v_i n_i = 0$$

Que expresa que el producto escalar $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$ es cero, es decir, que ambas direcciones principales son perpendiculares entre sí, como queríamos demostrar.

Caso de raíz múltiple de la ecuación característica.

Como se ha apuntado, en general no cabe esperar que el valor de las tensiones principales coincida, ya que no hay ninguna razón particular para que la ecuación característica deba tener raíces múltiples. Sin embargo esta circunstancia puede presentarse, y constituye un caso particular interesante. Para analizarlo, volvamos a plantear las ecuaciones (2.21), pero suponiendo que los valores de las dos tensiones principales σ y σ' coinciden (denotaremos como σ su valor):

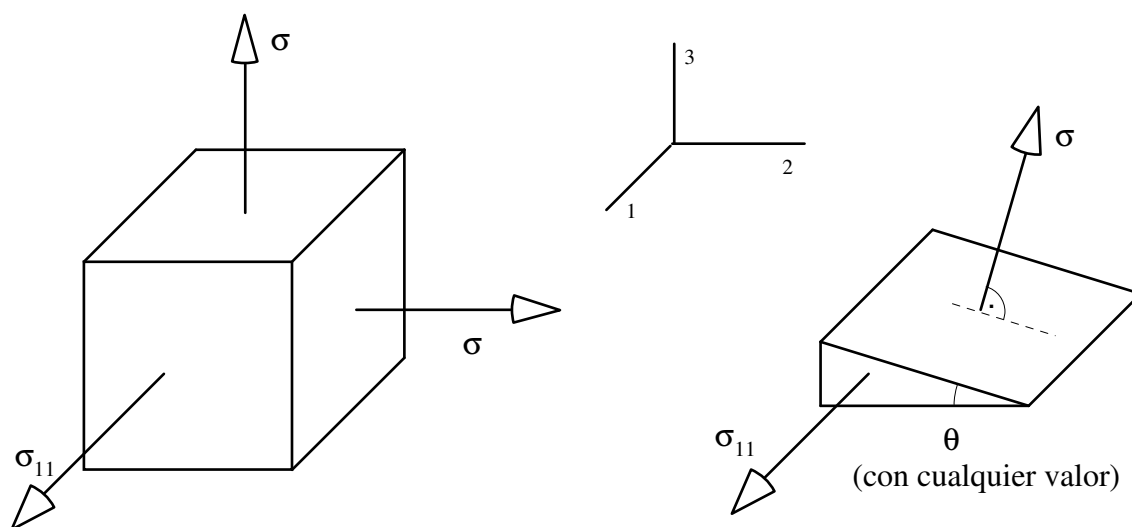
$$\sigma_{ij} n_j = \sigma n_i \qquad \sigma_{ij} v_j = \sigma v_i$$

Si multiplicamos a la primera de estas ecuaciones por un escalar arbitrario λ , a la segunda por otro escalar arbitrario λ' , y sumamos ambas, obtenemos:

$$\sigma_{ij} (\lambda n_j + \lambda' v_j) = \sigma (\lambda n_i + \lambda' v_i)$$

Pero esta ecuación expresa que la dirección $(\lambda \mathbf{n} + \lambda' \mathbf{v})$ es una dirección principal (apréciese en efecto la coincidencia formal con la ecuación 2.14). La conclusión por lo tanto es que si existe sólo tensión normal en dos direcciones distintas, y ésta es del mismo valor σ , entonces habrá sólo tensión normal en cualquier dirección dada por una combinación lineal de los vectores que definen las dos direcciones originales, y además la tensión tendrá el mismo valor σ .

Las figuras 2.10 ilustra la conclusión anterior. A la izquierda se muestra un sólido cúbico elemental de aristas paralelas a los ejes coordenados, en el que las caras de normal dirigida según los ejes 2 y 3 tienen tensión puramente normal, de valor σ . De paso, es interesante notar que la reciprocidad de las tensiones tangenciales implica que la dirección 1 será también principal, aunque su tensión será en general distinta de σ . La figura derecha muestra una porción del sólido anterior, en el que la normal a la cara oblicua puede obtenerse como combinación lineal de los vectores unitarios en las direcciones 2 y 3 (que tenían sólo tensión normal de valor σ), para cualquier valor del ángulo θ . Como acabamos de demostrar, esta cara oblicua tendrá también solamente tensión normal, y también de valor σ . Dicho de otra manera, cualquier plano que pertenezca a la radiación de planos que pasan por el punto considerado y son paralelos al eje 1, será también plano principal.



Figuras 2.10.- Caso de valor igual de dos tensiones principales.

También es posible que la ecuación característica tenga una raíz triple $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$. En este caso es sencillo demostrar que cualquier plano que pase por el punto considerado tiene sólo tensión normal, y que es del mismo valor. En efecto, si en unos ejes el tensor de tensiones vale $\sigma_{ij} = c \delta_{ij}$, siendo c una constante, el vector tensión en un plano genérico de normal \mathbf{n} tendrá como componentes:

$$T_i^n = \sigma_{ij} n_j = c \delta_{ij} n_j = c n_i$$

Con lo que queda demostrado que en este caso el vector tensión tiene siempre el mismo módulo c , y la dirección de la normal al plano. Este hecho tiene la implicación inmediata de que las componentes del tensor de tensiones serán $c\delta_{ij}$ en cualquier sistema de ejes (recuérdese la definición de los términos del tensor de tensiones en función de los vectores tensión que se expuso en el epígrafe 2.2). Este estado de tensión suele denominarse como "estado de presión hidrostática", ya que, en efecto, un fluido en reposo no puede soportar tensiones tangenciales, siendo el estado de tensiones referido el único posible en cada punto del fluido.

2.5.- Tensiones tangenciales máximas

Como indicaremos en un capítulo posterior, en muchos materiales (los llamados materiales dúctiles) el límite del comportamiento elástico está asociado a grandes rasgos con que el nivel de tensión tangencial alcance o no un cierto valor crítico. Por ello nos interesa saber el valor de las máximas tensiones tangenciales en un punto dado del sólido. Tomemos unos ejes coordenados coincidiendo con las direcciones principales de tensión. En estos ejes el vector tensión, dado por $T_i^n = \sigma_{ij} n_j$, resulta:

$$\mathbf{T}^n = \begin{bmatrix} \sigma_I n_1 \\ \sigma_{II} n_2 \\ \sigma_{III} n_3 \end{bmatrix}$$

La componente normal de tensión es la proyección de \mathbf{T}^n sobre \mathbf{n} :

$$\sigma = T_i^n n_i = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2$$

La componente tangencial de tensión se obtiene como:

$$\tau^2 = |\mathbf{T}^n|^2 - \sigma^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2 - (\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2)^2 \quad (2.22)$$

Mediante la condición $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ eliminamos una de las componentes de \mathbf{n} , por ejemplo n_3 :

$$\tau^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 (1 - n_1^2 - n_2^2) - [\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} (1 - n_1^2 - n_2^2)]^2$$

El máximo módulo de τ y de τ^2 ocurrirán en los mismos planos, por lo que planteamos las condiciones de máximo (o mínimo) para τ^2 . Tras agrupar términos se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau^2}{\partial n_1} = 0 &\Rightarrow n_1 [(\sigma_I - \sigma_{III}) - 2(\sigma_I - \sigma_{III})n_1^2 - 2(\sigma_{II} - \sigma_{III})n_2^2] = 0 \\ \frac{\partial \tau^2}{\partial n_2} = 0 &\Rightarrow n_2 [(\sigma_{II} - \sigma_{III}) - 2(\sigma_I - \sigma_{III})n_1^2 - 2(\sigma_{II} - \sigma_{III})n_2^2] = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Vamos a investigar las soluciones del sistema de ecuaciones (2.23):

Solución tipo $n_1 = n_2 = 0$

$$\Rightarrow n_3 = \pm 1$$

Es decir, un eje principal, del que sabemos $\tau=0$ (es un mínimo).
No es una solución interesante.

Solución tipo $n_1 = 0$

$$\text{La 2ª ecuación (2.23) da: } n_2 [(\sigma_{II} - \sigma_{III}) - 2(\sigma_{II} - \sigma_{III})n_2^2] = 0$$

$$\Rightarrow n_2 = \pm 1/\sqrt{2} \Rightarrow n_3 = \pm 1/\sqrt{2}$$

$$\text{Que llevado a (2.22) produce } \tau = (\sigma_{II} - \sigma_{III}) / 2$$

Solución tipo $n_2 = 0$

$$\text{La 1ª ecuación (2.23) da: } n_1 [(\sigma_I - \sigma_{III}) - 2(\sigma_I - \sigma_{III})n_1^2] = 0$$

$$\Rightarrow n_1 = \pm 1/\sqrt{2} \Rightarrow n_3 = \pm 1/\sqrt{2}$$

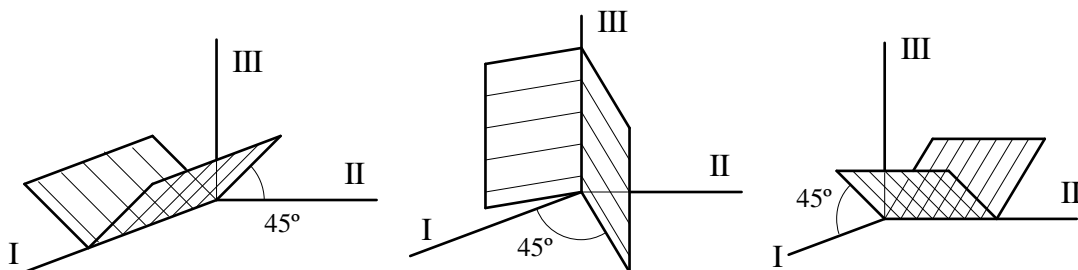
$$\text{Que llevado a (2.22) produce } \tau = (\sigma_I - \sigma_{III}) / 2$$

Finalmente, nótese que no existen soluciones tipo $n_1 \neq 0$, $n_2 \neq 0$, ya que el sistema (2.23) sería en general incompatible bajo estas condiciones. Por lo tanto, el esquema anterior recoge todas las posibles soluciones de (2.23).

Partiendo de (2.22), podríamos haber elegido eliminar un parámetro que no fuese n_3 . Si hubiésemos eliminado n_1 o n_2 , habríamos obtenido los mínimos del módulo de tensión tangencial correspondientes al eje principal I y al eje principal II, más alguna de las soluciones de máximo anteriores, y otra nueva solución de máximo, que es:

$$n_3 = 0 \quad n_1 = \pm 1/\sqrt{2} \quad n_2 = \pm 1/\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \tau = (\sigma_I - \sigma_{II}) / 2$$

El resultado de este análisis es por tanto, que existen tres mínimos relativos del módulo de la tensión tangencial, en los que la misma vale cero, y que corresponden a las direcciones principales. Existen seis máximos relativos del módulo de la tensión tangencial, que ocurren en los planos bisectores entre cada pareja de planos principales, como se ilustra en la figura 2.11. El valor de estos máximos de tensión tangencial es igual a la semidiferencia de las tensiones principales correspondientes. El máximo absoluto es evidentemente el mayor de estos máximos relativos.



Figuras 2.11.- Planos de tensión tangencial máxima.

2.6.- Representación de Mohr

La representación de Mohr es una construcción gráfica que permite relacionar las componentes intrínsecas del vector tensión con la orientación del plano correspondiente en el espacio. Aunque es claro que muchos métodos gráficos han perdido gran parte de su interés ante las posibilidades que ofrece el cálculo por ordenador, el lector no debe pensar de ningún modo que es ésta una de tantas representaciones gráficas de interés escaso. Muy al contrario, la representación de Mohr constituirá probablemente la idea más clara y perdurable que el lector poseerá acerca del estado de tensiones en un punto.

Para estructurar su estudio, trataremos en primer lugar la representación de Mohr desde un punto de vista analítico, que revela sus particularidades más interesantes sin desviar la atención hacia complicaciones de tipo geométrico. Estas últimas son sin embargo necesarias si se quiere utilizar la representación de Mohr como instrumento gráfico de cálculo, y serán tratadas en segundo lugar.

Enfoque analítico de la representación de Mohr

Adoptemos unos ejes coordenados según las direcciones principales. Obtuvimos en la sección anterior el vector tensión en estos ejes, así como las expresiones de sus componentes intrínsecas σ y τ , que satisfacían las relaciones:

$$\sigma^2 + \tau^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2$$

$$\sigma = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

La tercera de las ecuaciones expresa que \mathbf{n} es un vector unitario. En forma compacta, estas ecuaciones pueden escribirse:

$$\begin{bmatrix} \sigma_I^2 & \sigma_{II}^2 & \sigma_{III}^2 \\ \sigma_I & \sigma_{II} & \sigma_{III} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 + \tau^2 \\ \sigma \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Las ecuaciones (2.24) constituyen el fundamento de la representación de Mohr, la cual se elaborará manipulando apropiadamente dichas ecuaciones, e interpretando gráficamente los resultados. Conviene enfatizar que, pese a la aparente complejidad que tendrán dichas manipulaciones, no vamos a utilizar ninguna información adicional para construir la representación de Mohr. El saber esto nos permite adelantar cuáles serán las posibilidades y limitaciones de dicha representación, aunque todavía no sepamos en qué consiste exactamente. Estas posibilidades y limitaciones serán las mismas que presente el conjunto de ecuaciones (2.24). Realicemos una breve reflexión preliminar acerca de ello :

- La tensión tangencial τ aparece solo como τ^2 , por lo que el signo de la tensión tangencial será indiferente en la formulación. Nótese que de hecho no hemos definido ningún convenio de signos para τ .
- La tensión normal σ aparece como tal en la segunda de las ecuaciones, por lo que esta formulación la recoge como un escalar con signo. Recordemos que el convenio de signos adoptado es el que se desprende de la definición de σ como producto escalar, ecuación (2.2), resultando positiva si es de tracción.
- Las componentes n_j del vector normal al plano aparecen como n_j^2 . Por lo tanto su signo es indiferente en la formulación. Ello implica que si unas componentes de \mathbf{n} , digamos (a, b, c) , satisfacen (2.24), también lo harán $(-a, b, c)$, $(-a, -b, -c)$, etc. Resulta así que para unas componentes intrínsecas dadas σ, τ de la tensión, existirán ocho planos solución sobre los que la tensión presenta esas componentes intrínsecas. Cuatro de las soluciones del vector \mathbf{n} son directamente opuestas a las otras cuatro, definiendo en realidad el mismo plano, salvo por la dirección exterior. La figura 2.12 ilustra esta multiplicidad de soluciones.
- En cuanto a las posibilidades que ofrece (2.24), las más inmediatas se derivan de considerar conocidas las tensiones y direcciones principales, y son las siguientes: 1º) el cálculo de las componentes intrínsecas del vector tensión que actúa sobre un plano dado. 2º) el cálculo de la orientación del plano (los planos) cuyo vector tensión tiene componentes intrínsecas dadas. El determinante de la matriz cuadrada de (2.24) es distinto de cero siempre que las tensiones principales sean todas de distinto valor: $\sigma_I \neq \sigma_{II} \neq \sigma_{III}$. Este es el caso general, y supondremos que esto es así salvo indicación en contrario. El caso particular de dos o tres tensiones principales iguales se analizará separadamente más tarde.

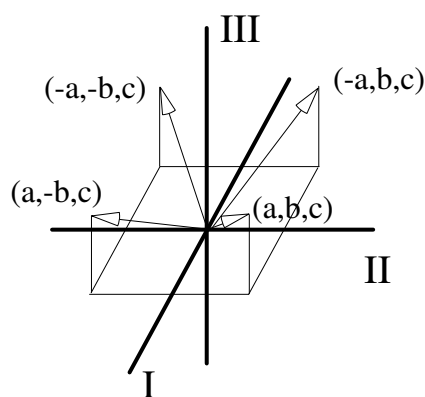


Figura 2.12.- Cuatro soluciones de \mathbf{n} que definen planos con σ y τ dadas (las otras cuatro serían directamente opuestas).

Pasemos ya a la obtención de la representación de Mohr. Supongamos n_1 conocido, lo que equivale a limitar el vector \mathbf{n} a la superficie de un cono de eje x_1 y semiángulo arco coseno de n_1 . La ecuación (2.24) puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{II}^2 & \sigma_{III}^2 \\ \sigma_{II} & \sigma_{III} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 + \tau^2 - \sigma_I^2 n_1^2 \\ \sigma - \sigma_I n_1^2 \\ 1 - n_1^2 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Recordemos brevemente las condiciones básicas de existencia de solución para un sistema de ecuaciones lineales tipo $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} \text{Compatible: } & \text{Rango}(\mathbf{A}) = \text{Rango}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \\ & \text{Determinado :} && \text{Rango} = \text{N}^\circ \text{ de incógnitas} \\ & \text{Indeterminado:} && \text{Rango} < \text{N}^\circ \text{ de incógnitas} \\ \text{Incompatible: } & \text{Rango}(\mathbf{A}) < \text{Rango}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que (2.25) sea compatible (exista solución en n_2, n_3), las matrices de coeficientes y la matriz ampliada deben ser del mismo rango, lo cual sólo puede ocurrir en este caso si el determinante de la matriz ampliada es cero:

$$\begin{vmatrix} \sigma^2 + \tau^2 - \sigma_I^2 n_1^2 & \sigma_{II}^2 & \sigma_{III}^2 \\ \sigma - \sigma_I n_1^2 & \sigma_{II} & \sigma_{III} \\ 1 - n_1^2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.26)$$

Desarrollemos este determinante por la primera columna:

$$(\sigma^2 + \tau^2 - \sigma_I^2 n_1^2)(\sigma_{II} - \sigma_{III}) - (\sigma - \sigma_I n_1^2)(\sigma_{II}^2 - \sigma_{III}^2) + (1 - n_1^2)(\sigma_{II}^2 \sigma_{III} - \sigma_{III}^2 \sigma_{II}) = 0$$

Dividiendo entre $(\sigma_{II} - \sigma_{III})$ y agrupando términos se obtiene:

$$\sigma^2 + \tau^2 - \sigma(\sigma_{II} + \sigma_{III}) + [\sigma_{II} \sigma_{III} + n_1^2(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_I - \sigma_{II})] = 0 \quad (\text{familia 1}) \quad (2.27)$$

Que es la ecuación de una familia de circunferencias de parámetro n_1 en un espacio bidimensional $\sigma - \tau$, a la que llamaremos familia 1 de circunferencias. La primera de las figuras 2.13 muestra la circunferencia de esta familia que se obtiene para $n_1 = 0$. Por tanto, las combinaciones posibles de tensión normal y tangencial en planos paralelos al eje I que pasan por el punto considerado, son las que describe esta circunferencia.

Recordemos que la ecuación de una circunferencia de centro (a,b) y radio R en un espacio descrito por coordenadas cartesianas $x-y$, es: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$, pudiéndose identificar inmediatamente que el centro es común a toda la familia 1 de circunferencias (son por tanto concéntricas), y está en la posición $\sigma = (\sigma_{II} + \sigma_{III})/2$; $\tau = 0$.

Si en (2.24) hubiésemos elegido dar por conocido n_2 , hubiésemos obtenido la ecuación de otra familia de circunferencias de parámetro n_2 , que llamaremos familia 2 de circunferencias. Su expresión es:

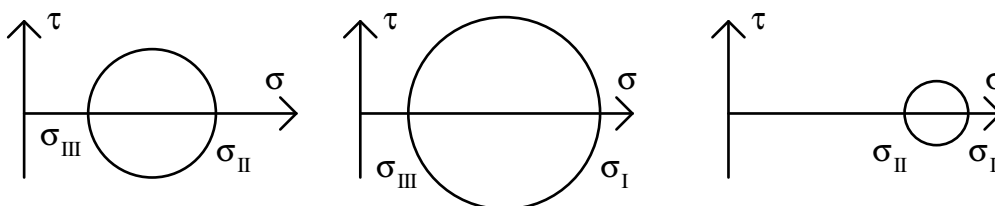
$$\sigma^2 + \tau^2 - \sigma(\sigma_{III} + \sigma_I) + [\sigma_{III} \sigma_I + n_2^2(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_{II} - \sigma_{III})] = 0 \quad (\text{familia 2}) \quad (2.28)$$

Nuevamente se trata de una familia de circunferencias concéntricas. El centro está en la posición $\sigma = (\sigma_{III} + \sigma_I)/2$; $\tau=0$. La circunferencia de esta familia que tiene $n_2 = 0$ se muestra en la segunda de las figuras 2.13. Las combinaciones posibles de tensión normal y tangencial en planos paralelos al eje II que pasan por el punto considerado, son las que describe esta circunferencia.

Finalmente, si en (2.24) elegimos dar por conocido n_3 , obtendremos la ecuación de otra familia de circunferencias de parámetro n_3 , que llamaremos familia 3 de circunferencias. Su expresión es:

$$\sigma^2 + \tau^2 - \sigma(\sigma_I + \sigma_{II}) + [\sigma_I \sigma_{II} + n_3^2(\sigma_{II} - \sigma_{III})(\sigma_{III} - \sigma_I)] = 0 \quad (\text{familia 3}) \quad (2.29)$$

Esta familia de circunferencias concéntricas tiene su centro en $\sigma = (\sigma_{II} + \sigma_I)/2$; $\tau=0$. La circunferencia de esta familia que tiene $n_3=0$ se muestra en la tercera de las figuras 2.13. Los puntos de esta circunferencia representan las combinaciones posibles de tensión normal y tangencial en planos paralelos al eje III que pasan por el punto considerado.



Figuras 2.13.- Circunferencias de las familias 1, 2 y 3, de $n_1 = 0$, $n_2 = 0$, y $n_3 = 0$, respectivamente.

Supondremos sin pérdida de generalidad que las tensiones principales están ordenadas de la manera siguiente:

$$\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III} \quad (2.30)$$

Las tres circunferencias de la figura 2.13 aparecerán como muestra la figura 2.14.

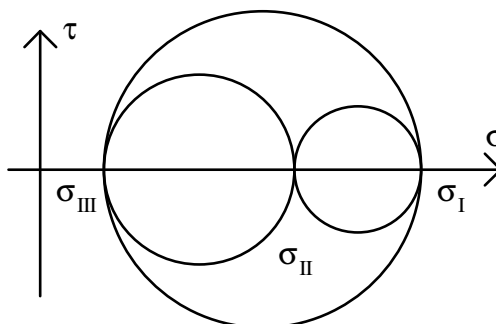


Figura 2.14.- Circunferencias de las familias 1, 2 y 3, de $n_1 = 0$, $n_2 = 0$, y $n_3 = 0$, respectivamente, siendo $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$

Desde un punto de vista físico es evidente que no todos los puntos del plano σ - τ serán representativos de tensiones en planos que pasen por el punto considerado, ya que por ejemplo, ello implicaría la existencia de planos en los que actuarían vectores tensión

de componentes arbitrariamente grandes. Nos proponemos averiguar cuáles son las zonas del plano σ - τ que son representativas. Para ello, consideremos un plano arbitrario cuya normal tiene componentes n_1, n_2, n_3 , y veamos dónde puede estar representado su vector tensión en el plano σ - τ .

El círculo de familia 1 que corresponde a la tensión en ese plano tendrá por ecuación la (2.27), que reproducimos a continuación para efectuar cómodamente la identificación de términos con la circunferencia estándar de centro $(a,0)$ y radio R en un espacio x - y :

$$\begin{aligned} \sigma^2 + \tau^2 - \sigma(\sigma_{II} + \sigma_{III}) + [\sigma_{II}\sigma_{III} + n_1^2(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_I - \sigma_{II})] &= 0 \\ x^2 + y^2 - 2ax + [a^2 - R_1^2] &= 0 \end{aligned}$$

Es inmediato identificar el ya conocido centro de la familia, $a=(\sigma_{II} + \sigma_{III})/2$, y el radio que resulta ser:

$$R_1^2 = \left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2} \right)^2 - n_1^2(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_I - \sigma_{II}) \quad (2.31)$$

El primer término del miembro derecho es el radio al cuadrado de la circunferencia de familia 1 de $n_1=0$. El segundo término supone la adición de una cantidad positiva, por lo que R_1 será siempre mayor que el radio de la primera circunferencia de la figura 2.13. Esto supone que la zona de puntos σ - τ representativos es exterior a esa circunferencia, como indica la primera de las figuras 2.15.

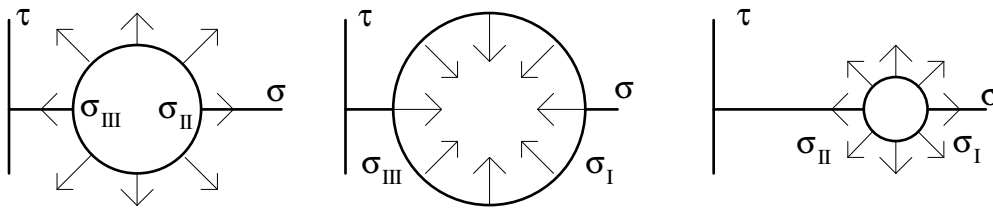
Mediante idéntico procedimiento, obtenemos el radio de la circunferencia de familia 2 a partir de su ecuación (2.28). El resultado es

$$R_2^2 = \left(\frac{\sigma_{III} - \sigma_I}{2} \right)^2 - n_2^2(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_{II} - \sigma_{III}) \quad (2.32)$$

Que supone que el radio de una circunferencia de familia 2 será siempre menor que el de la de $n_2=0$, segunda de las circunferencias de la figura 2.13. Por lo tanto sólo los puntos interiores a esta circunferencia serán representativos, lo que se indica en la segunda de las figuras 2.15. Finalmente, obtenemos de la misma forma el radio de la circunferencia de familia 3 a partir de su ecuación (2.29), resultando:

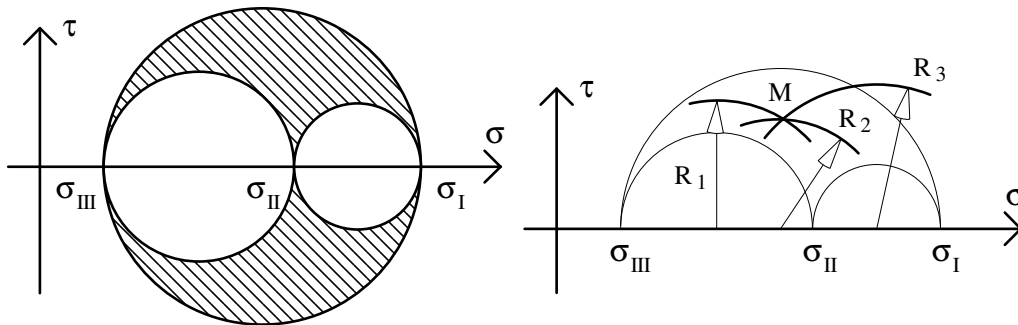
$$R_3^2 = \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \right)^2 - n_3^2(\sigma_{II} - \sigma_{III})(\sigma_{III} - \sigma_I) \quad (2.33)$$

Lo que indica que sólo la zona exterior a la circunferencia de familia 3 de $n_3=0$ es representativa de las componentes intrínsecas del vector tensión en algún plano que pasa por el punto. Ello se ilustra en la tercera de las figuras 2.15.



Figuras 2.15.- Acotación de las zonas que son representativas de la tensión en algún plano de corte en el punto considerado.

En definitiva, dadas las tensiones principales, la zona de puntos σ - τ representativa del vector tensión (sobre algún plano que pasa por el punto considerado del sólido) es la limitada por las tres condiciones mostradas en la figura 2.15. Esta zona se muestra sombreada en la primera de las figuras 2.16. Por un punto del diagrama dado, de coordenadas σ - τ , interior a la zona sombreada, pasará una circunferencia de cada familia, como indica la segunda figura 2.16. Se ha representado sólo la mitad superior del diagrama porque como se indicó al principio de este epígrafe, el signo de la tensión tangencial no juega ningún papel en la formulación que sustenta el diagrama de Mohr.



Figuras 2.16.- Región representativa de σ - τ , y circunferencias de las tres familias que pasan por un punto $M(\sigma, \tau)$.

Partiendo del conocimiento de las tensiones principales (para poder trazar el diagrama), y de las direcciones principales (a las que estarán referidas las componentes n_i), las posibilidades más inmediatas que ofrece la representación de Mohr son las siguientes: Si se dan unas componentes intrínsecas del vector tensión (σ, τ) y se quiere calcular la orientación del plano sobre el que actúa esta tensión, se puede trazar el punto (σ, τ) en el diagrama, medir (o calcular) los radios R_1, R_2, R_3 , de las circunferencias de las tres familias, y utilizar las ecuaciones (2.31), (2.32) y (2.33) para obtener n_1^2, n_2^2 , y n_3^2 . Si se da la orientación de un plano, de normal (n_1, n_2, n_3) , y se quieren saber las componentes intrínsecas del vector tensión que actúa en ese plano, se pueden calcular directamente R_1, R_2 , y R_3 con las ecuaciones (2.31), (2.32) y (2.33) (será en realidad suficiente con dos de los radios), trazar el punto M en el diagrama, y medir sus componentes (σ, τ).

Las posibilidades anteriores coinciden con las enumeradas al principio de este epígrafe, relativas al sistema de ecuaciones original (2.24). Lo que es más, el cálculo de las componentes intrínsecas dada la orientación del plano era notablemente sencillo

usando aquellas ecuaciones, mientras que el uso del diagrama requiere el uso de compás y regla, o bien realizar cálculos algo molestos. ¿Porqué introducimos entonces la complicación adicional de un diagrama? La respuesta está en que permite apreciar a primera vista algunas características importantes del estado de tensión en el punto. Por ejemplo, permite saber inmediatamente cuál es el máximo absoluto de la tensión tangencial (que será el mayor de los máximos relativos estudiados en el epígrafe 2.5). Vendrá dado por el punto más alto del diagrama, y su valor coincidirá con el radio de la circunferencia de familia 2 de $n_2 = 0$. También permite dilucidar al instante si en algún plano existirá tensión normal de tracción (existirá tracción si parte o todo el diagrama está en la zona positiva del eje σ), lo que es de interés por ejemplo cuando el material tiene poca capacidad de soportar tracción, como es el caso de los hormigones. Además, es frecuente que por ciertos motivos sólo nos interese conocer la tensión en planos paralelos a un eje principal (\mathbf{n} será perpendicular a ese eje). En este caso, sabemos que nos moveremos por una de las circunferencias extremas del diagrama (la de familia i de $n_i = 0$, siendo i el eje respecto al que \mathbf{n} se mantiene perpendicular). Veremos en un apartado posterior que ello supone una simplificación importante, siendo mucho más sencillo en estos casos recordar el modo de operar con el diagrama que memorizar las expresiones analíticas.

Tras la obtención de las ecuaciones (2.24) habíamos decidido aplazar la discusión del caso de dos tensiones principales iguales, que consideraremos ahora. Si dos tensiones principales, por ejemplo σ_{II} y σ_{III} , tienen el mismo valor σ_R , podemos escribir (2.24) como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_I^2 & \sigma_R^2 \\ \sigma_I & \sigma_R \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 + n_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 + \tau^2 \\ \sigma \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Para que el conjunto de tres ecuaciones anterior tenga solución en \mathbf{n} para unas σ y τ dadas, el determinante de la matriz ampliada debe ser nulo:

$$\begin{vmatrix} \sigma^2 + \tau^2 & \sigma_I^2 & \sigma_R^2 \\ \sigma & \sigma_I & \sigma_R \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando este determinante por la primera columna, y dividiendo por $(\sigma_I - \sigma_R)$, obtenemos:

$$\sigma^2 + \tau^2 - (\sigma_I + \sigma_R)\sigma + \sigma_I\sigma_R = 0$$

Que es precisamente la ecuación de la circunferencia de familia 2 de $n_2 = 0$ (ver ecuación (2.28)), o también la de familia 3 de $n_3 = 0$ (ver ec. (2.29)), ya que ambas circunferencias coinciden si $\sigma_{II} = \sigma_{III}$. Esto nos muestra que si dos tensiones principales son iguales, las componentes de tensión (σ, τ) de *cualquier* plano solo pueden estar sobre una circunferencia. La figura 2.17 ayuda a entender esta situación como límite del caso de tensiones principales muy similares, en donde resulta claro que la región representativa degenera hacia la circunferencia exterior.

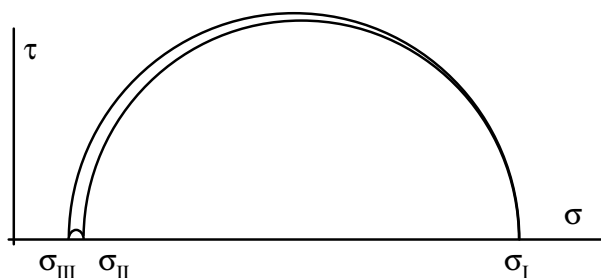


Figura 2.17.- Diagrama casi degenerado, con dos tensiones principales muy próximas.

Por tanto, cuando dos tensiones principales coinciden, el diagrama degenera hacia una única circunferencia. La construcción gráfica pone pues de manifiesto que el valor de τ quedará definido por el de σ . En efecto, si consideramos un valor dado de σ , las dos últimas ecuaciones de (2.34) permiten calcular n^2_1 (en general la componente de \mathbf{n} correspondiente a la tensión principal no degenerada), y también la suma $n^2_2+n^2_3$ (aunque quedan indeterminados los valores de n^2_2 y n^2_3). Calculados estos valores, la primera de las ecuaciones (2.34) permite calcular τ . Para el ejemplo anterior de degeneración de σ_{II} y σ_{III} , el resultado es:

$$n^2_1 = \frac{\sigma - \sigma_R}{\sigma_I - \sigma_R} \quad n^2_2 + n^2_3 = \frac{\sigma_I - \sigma}{\sigma_I - \sigma_R} \quad \tau^2 = -\sigma^2 + (\sigma_I + \sigma_R)\sigma - \sigma_I\sigma_R$$

Puede comprobarse que la última ecuación proporciona valores positivos para τ^2 en el rango $\sigma_R < \sigma < \sigma_I$, anulándose en $\sigma = \sigma_R$ y en $\sigma = \sigma_I$. Esto último era lo esperado a la vista del diagrama degenerado de la figura 2.17.

Enfoque gráfico de la representación de Mohr

Veremos ahora cómo utilizar el diagrama de Mohr como herramienta gráfica de cálculo. El interés de este cálculo gráfico en sí mismo es limitado, ya que el manejo directo de las ecuaciones (2.24) permite realizar las mismas tareas, y resulta más cómodo si se dispone de ayuda automática para los cálculos (por ejemplo cualquier calculadora programable de bolsillo). Las razones por las que abordamos aquí el enfoque gráfico, son por una parte que su particularización a lo que llamaremos "problemas planos" será inmediata y resulta interesante, y por otra parte que llegados a este punto del estudio del diagrama, el esfuerzo adicional requerido es pequeño. Antes de abordar las construcciones gráficas sobre el diagrama recordaremos algunas definiciones y propiedades geométricas:

En primer lugar, recordemos que la potencia de un punto P respecto de una circunferencia se define como el número real que se obtiene al multiplicar las distancias de P a los dos puntos de intersección de la circunferencia con una secante a la misma que pase por P. La potencia resulta ser independiente de cuál sea la secante elegida. Se

adopta la convención de asignarle signo positivo si P es exterior a la circunferencia, y negativo si es interior. Así, con relación a la figura 2.18, tendremos:

$$\text{Pot} = PM \times PN = PM' \times PN' = PQ^2 \quad (2.35)$$

Por otra parte, si en unas coordenadas cartesianas x-y escribimos la ecuación de la circunferencia de radio R y centro (a,b) en la forma $F(x,y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0$, se demuestra que la potencia puede calcularse particularizando en las coordenadas del punto $P(x_p, y_p)$ la función $F(x,y)$:

$$\text{Pot} = F(x_p, y_p) = (x_p - a)^2 + (y_p - b)^2 - R^2 \quad (2.36)$$

Utilizaremos la notación tipo $\text{Pot}(P/C)$ para especificar que se trata de la potencia del punto P respecto de la circunferencia C, para la cual a su vez utilizaremos alguna notación adecuada (generalmente los dos puntos del diámetro definido por el eje σ).

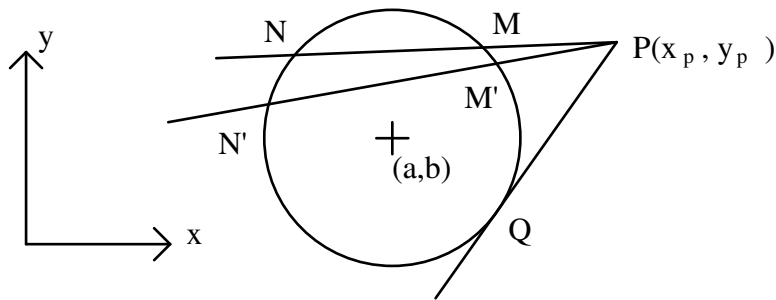
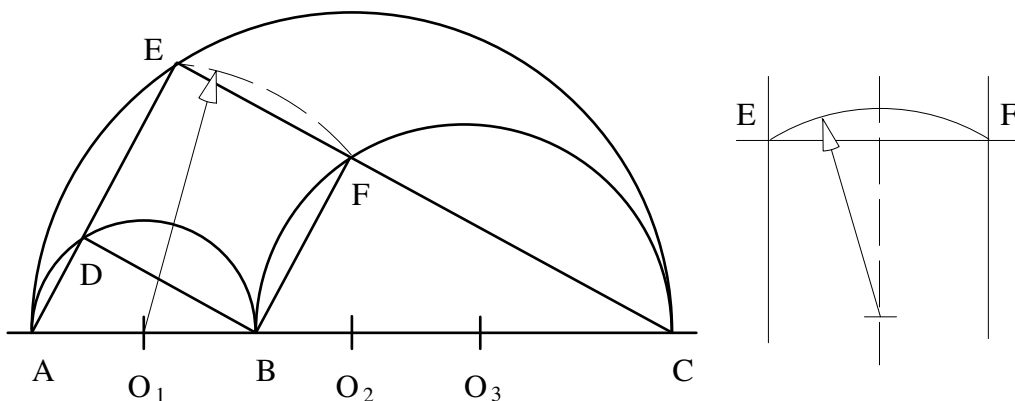


Figura 2.18.- Secantes a una circunferencia trazadas desde un punto P.

En segundo lugar, llamemos la atención sobre algunas relaciones que se presentan en una construcción gráfica del tipo a la de la figura 2.16. Comencemos observando, ver figura 2.19, que un triángulo como AEC será siempre rectángulo, por abarcar un diámetro de una circunferencia.



Figuras 2.19.- Algunas particularidades geométricas de la representación.

Si con los puntos de intersección D y F de el triángulo anterior con las dos circunferencias pequeñas trazamos dos nuevos triángulos, ADB y BFC según se indica, estos triángulos serán también rectángulos, y además semejantes al AEC, dado que comparten con él un vértice (A o C) que no es el que tiene ángulo recto. Si trazamos con

centro O_1 un arco de circunferencia que pase por E, este arco pasará también por F. Esto debe ser así porque O_1 es equidistante de las dos paralelas AE y BF, y los puntos E y F están sobre una misma perpendicular a estas paralelas. La segunda de las figuras 2.19 permiten apreciar claramente que la simetría del trazado respecto de la mediana entre las rectas paralelas implica que el arco de circunferencia debe pasar por E y por F.

Pasemos ya al problema de cálculo gráfico de los cosenos directores (n_1, n_2, n_3) que corresponden a unas componentes (σ, τ) del vector tensión. Estas componentes definirán un punto $M(\sigma, \tau)$ en el plano σ - τ , cuyo trazado se muestra en la figura 2.20. El punto E de la circunferencia de familia 1 que pasa por M tiene evidentemente la misma potencia que M respecto de la circunferencia menor de la familia 1, a la que nos referiremos como circunferencia AB. Esta potencia es, según (2.36):

$$\text{Pot (M/AB)} = \sigma^2 + \tau^2 - \sigma (\sigma_{II} + \sigma_{III}) + \sigma_{II}\sigma_{III} \quad (2.37)$$

Pero las componentes de $M(\sigma, \tau)$ satisfacen la ecuación de la circunferencia de familia 1 que le corresponde (la que pasa por E y F). Esa ecuación no es otra que (2.27), la que podemos utilizar en combinación con (2.37) para obtener:

$$\text{Pot (M/AB)} = -n_1^2 (\sigma_{III} - \sigma_I) (\sigma_I - \sigma_{II}) \quad (2.38)$$

Utilizando su definición inicial, esta potencia puede expresarse también como:

$$\text{Pot (M/AB)} = ED \times EA = FB \times EA = (\sigma_I - \sigma_{II}) \cos \alpha (\sigma_I - \sigma_{III}) \cos \alpha \quad (2.39)$$

Identificando (2.38) y (2.39) tenemos $n_1^2 = \cos^2 \alpha$, es decir:

$$n_1 = \pm \cos \alpha \quad (2.40)$$

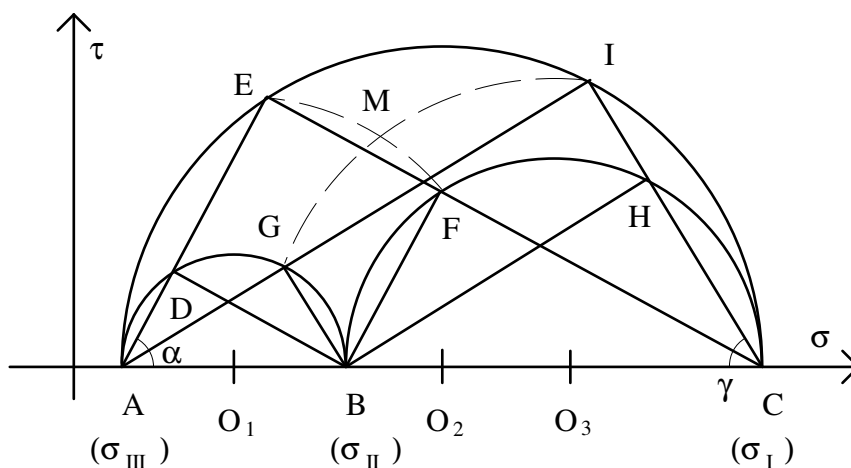


Figura 2.20.- Cálculo gráfico con el Diagrama de Mohr.

Siguiendo una construcción análoga, consideremos ahora el punto I, que pertenece simultáneamente a la circunferencia de familia 3 que pasa por M, y a la mayor de las circunferencias de familia 2. Este punto tendrá la misma potencia que M respecto de la

menor de las circunferencias de familia 3 (circunferencia BC). Los triángulos IAC, GAB, y HBC, serán rectángulos y semejantes entre sí, por lo que GB será paralelo a IC, y el arco de circunferencia de familia 3 que pasa por I deberá pasar también por G. Por tanto, tendremos:

$$\text{Pot (M/BC)} = \sigma^2 + \tau^2 - \sigma (\sigma_I + \sigma_{II}) + \sigma_I \sigma_{II} \quad (2.41)$$

Nuevamente, las componentes (σ, τ) de M satisfacen la ecuación de la circunferencia de familia 3 que le corresponde (la que pasa por I y G). Esta ecuación es la (2.29). Combinándola con (2.41) obtenemos:

$$\text{Pot (M/BC)} = -n_3^2 (\sigma_{II} - \sigma_{III}) (\sigma_{III} - \sigma_I) \quad (2.42)$$

Que desde el punto de vista geométrico puede expresarse como:

$$\text{Pot (M/BC)} = IH \times IC = GB \times IC = (\sigma_{II} - \sigma_{III}) \cos \gamma (\sigma_I - \sigma_{III}) \cos \gamma \quad (2.43)$$

Identificando (2.42) y (2.43) tenemos $n_3^2 = \cos^2 \gamma$, es decir:

$$n_3 = \pm \cos \gamma \quad (2.44)$$

El cálculo de la componente n_2 resulta inmediato una vez conocidos n_1 y n_3 , sin más que utilizar la condición de que \mathbf{n} es un vector unitario. Sin embargo, en algunos casos puede resultar conveniente calcular n_2 directamente, lo que realizaremos a continuación. La figura 2.21 reproduce una vez más el diagrama de Mohr y el punto M de componentes (σ, τ) .

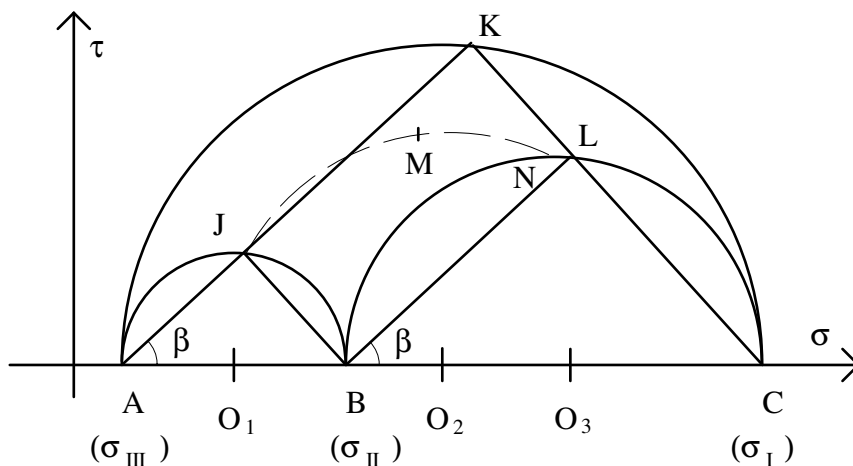


Figura 2.21.- Cálculo gráfico de n_2 .

El punto J se obtiene como la intersección entre la circunferencia de familia 2 que pasa por M y la circunferencia AB (la más pequeña de la familia 1). La recta que pasa por A y J define el punto K sobre la circunferencia AC. La recta que pasa por K y C define el punto L sobre la circunferencia BC. Los triángulos KAC, JAB, y LBC son semejantes. Nótese que no existe ninguna razón para que el arco de circunferencia JM pase por el

punto L. El punto J tiene la misma potencia que M respecto de la circunferencia AC, y vale:

$$\text{Pot (M/AC)} = \sigma^2 + \tau^2 - \sigma (\sigma_I + \sigma_{III}) + \sigma_I \sigma_{III} = (\text{ver ec. (2.28)}) = -n_2^2 (\sigma_I - \sigma_{II}) (\sigma_{II} - \sigma_{III})$$

Por otra parte, de la definición geométrica de la potencia obtenemos:

$$\text{Pot (M/AC)} = -JA \times JK = -JA \times BL = -(\sigma_{II} - \sigma_{III}) \cos \beta (\sigma_I - \sigma_{II}) \cos \beta$$

Identificando el valor obtenido del calculo analítico con el del cálculo gráfico, obtenemos $n_2^2 = \cos^2 \beta$, es decir:

$$n_2 = \pm \cos \beta \quad (2.45)$$

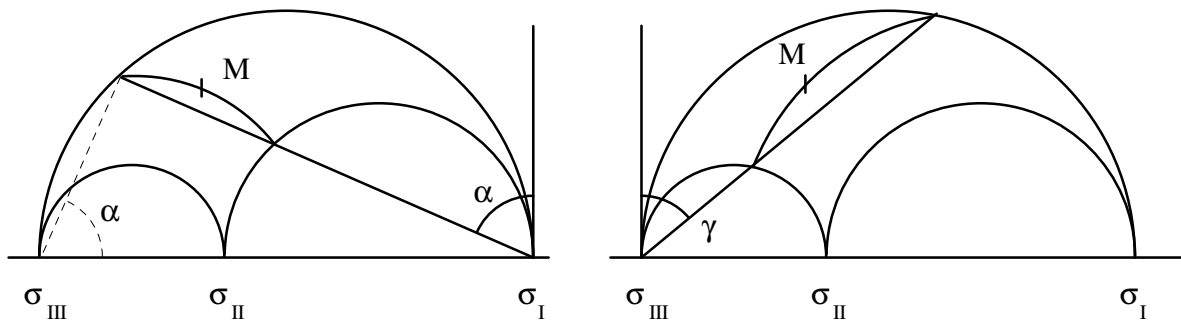
En la figura 2.21 se ha elegido utilizar el punto J como base del trazado, aunque puede realizarse un trazado homólogo utilizando el punto N, definido por la intersección entre la circunferencia BC (la menor de la familia 3), y la circunferencia de familia 2 que pasa por M. El lector puede realizar ese trazado y demostrar de manera totalmente análoga que del mismo se obtiene también al ángulo β .

Las ecuaciones (2.40), (2.44), y (2.45), junto con las correspondientes construcciones gráficas permiten calcular las componentes n_i de los vectores normales a los planos en que las componentes del vector tensión (σ, τ) son dadas, o bien resolver el problema inverso de determinación de las componentes (σ, τ) que corresponden a unas n_i dadas. Sin embargo, tal como se han desarrollado, los procedimientos a seguir resultan más bien difíciles de recordar. Por ello presentamos seguidamente a modo de recapitulación dichos procedimientos, organizados en un esquema más mnemotécnico.

a) σ, τ dados. Se pretende calcular n_1, n_2, n_3 .

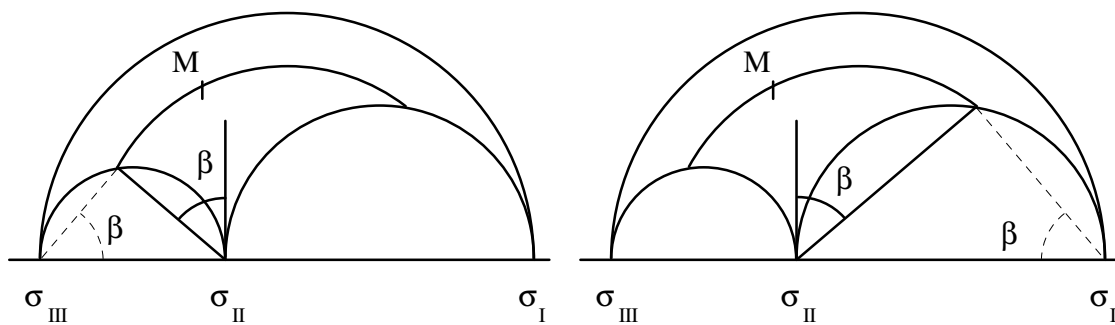
Para calcular n_1 , trazamos la circunferencia de familia 1 que pasa por $M(\sigma, \tau)$. Trazamos la recta que pasa por su intersección con las circunferencias extremas de las familias 2 y 3. Esta recta debe pasar por el punto $(\sigma_I, 0)$, y forma con la vertical en este punto (σ_I) el ángulo $\alpha = \text{acos } n_1$ (ver primera de las figuras 2.22). Nótese que el ángulo indicado coincide efectivamente con α tal como fue calculado en la figura 2.20, por ser sus lados perpendiculares entre sí. Resulta más fácil de recordar que el ángulo correspondiente a n_1 se mide en la vertical de $\sigma = \sigma_I$.

Para calcular n_3 , trazamos la circunferencia de familia 3 que pasa por $M(\sigma, \tau)$. Trazamos la recta que pasa por su intersección con las circunferencias extremas de las familias 1 y 2. Esta recta debe pasar por el punto $(\sigma_{III}, 0)$, y forma con la vertical en este punto (σ_{III}) el ángulo $\gamma = \text{acos } n_3$ (ver segunda de las figuras 2.22). Nuevamente resulta más fácil de recordar que el ángulo correspondiente a n_3 se mide en la vertical de $\sigma_{III} = 0$.



Figuras 2.22.- Resumen del procedimiento para el cálculo gráfico de n_1 y n_3 .

Para calcular n_2 , trazamos la circunferencia de familia 2 que pasa por $M(\sigma, \tau)$. Trazamos la recta que pasa por su intersección con la circunferencia extrema de la familia 1 (o bien de la familia 3) y por el punto $(\sigma_{II}, 0)$. Esta recta (también la alternativa) forma con la vertical en este punto $(\sigma_{II}, 0)$ el ángulo $\beta = \text{acos } n_2$ (ver figuras 2.23).



Figuras 2.23.- Resumen del procedimiento para el cálculo gráfico de n_2 .

b) n_1, n_2, n_3 dados. Se pretende calcular σ, τ .

El problema se reduce a trazar dos de las circunferencias de la familia 1, 2, o 3 que corresponden al vector \mathbf{n} dado. La intersección de las dos circunferencias define el punto (σ, τ) buscado. La tercera circunferencia debe pasar por el mismo punto, y puede utilizarse como comprobación. Por ejemplo trazamos el ángulo $\alpha = \text{acos } n_1$ desde la vertical en $\sigma = \sigma_I$. Con los puntos de intersección de la recta así obtenida con las circunferencias extremas de las familias 2 y 3 trazamos el círculo de familia 1, sobre el que estará el punto buscado. Trazamos después el ángulo $\gamma = \text{acos } n_3$ en la vertical de $\sigma = \sigma_{III}$. Con los puntos de intersección con las circunferencias extremas de las familias 1 y 2 trazamos la circunferencia de familia 3, sobre la que también debe estar el punto buscado, con lo que éste queda definido. Como comprobación, podemos trazar desde la vertical en $\sigma = \sigma_{II}$ el ángulo $\beta = \text{acos } n_2$ (siendo indiferente si se traza hacia la derecha o hacia la izquierda). Si β se trazó hacia la izquierda, la intersección de la recta obtenida con la circunferencia extrema de la familia 1, define un punto de la circunferencia de familia 2 que debe pasar también por nuestro punto (σ, τ) . Si β se trazó hacia la derecha, la intersección se

produce con la circunferencia extrema de la familia 3 (ver figura 2.23), procediéndose análogamente. Las figuras 2.22 y 2.23 sirven también para ilustrar el procedimiento descrito, sin más que pensar que el orden de trazado es el indicado aquí en lugar del indicado en los párrafos anteriores.

Particularización de la representación de Mohr para problemas planos.

En el punto en que nos encontramos en el estudio de la Teoría de la Elasticidad no podemos aún enunciar en qué consistirá lo que más tarde entenderemos por problemas planos. Daremos ahora una definición con carácter provisional, suficiente para los propósitos de este epígrafe, y completaremos esta definición en un capítulo posterior. Por ahora, entenderemos que el estado de tensión en un punto constituye para nosotros un problema plano cuando se dan los siguientes requisitos:

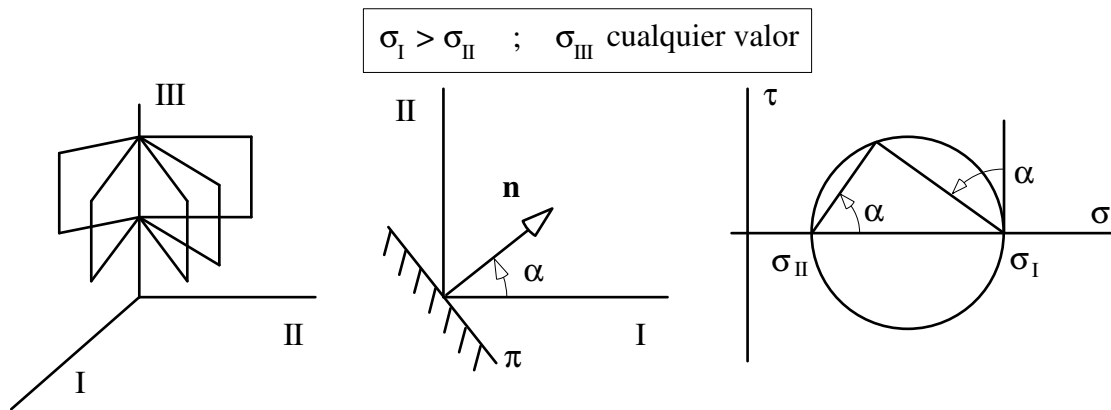
- Una dirección principal de tensión es conocida en ese punto (usualmente será constante en todo el sólido, pero esa consideración no es imprescindible aquí).
- Sólo nos interesa calcular el vector tensión en planos paralelos a esa dirección.

En estos casos, sabemos que las componentes (σ, τ) del vector tensión estarán representadas en el círculo extremo del diagrama de Mohr de la familia "i", siendo n_i la componente nula del vector normal al plano (referido a ejes principales). Tendremos así la importante simplificación de que manejaremos sólo una circunferencia.

Representaremos el sólido en la perspectiva plana que resulta de observar el mismo desde un punto del eje principal conocido. Este eje se confunde con un punto, y los planos en que interesa analizar el vector tensión se ven como rectas en esta perspectiva. Entre estos planos de nuestro interés, existirán dos que sean principales. Por simplicidad, vamos a denotar como σ_I y σ_{II} las tensiones que se dan en estos planos, independientemente de que el valor de la tensión principal de la dirección conocida inicialmente sea mayor, intermedio, o menor que σ_I y σ_{II} . Nótese por tanto que el orden de los ejes principales puede no ser coincidente con el orden adoptado en el problema general (dado por $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$) cuando usamos esta convención para problemas planos. Las figuras 2.24 muestran esquemáticamente esta convención.

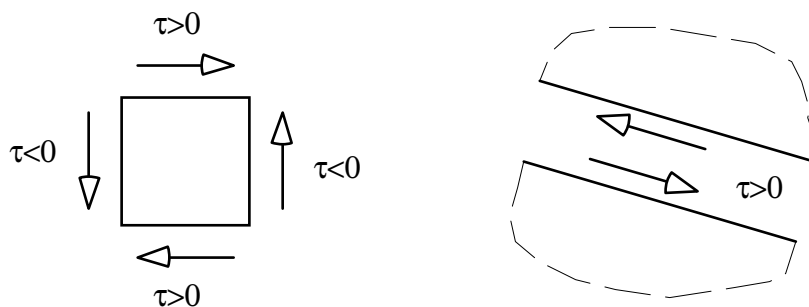
Tratándose de problemas planos, es posible definir un convenio de signos para la componente tangencial τ del vector tensión. Vamos a ver además como una vez definido el convenio de signos podemos recuperar la mitad inferior del diagrama de Mohr para los cálculos. El convenio de signos que usaremos será el siguiente:

Asignamos valor positivo al escalar τ si el sólido queda a la derecha, según un observador que avanza en la dirección de la tensión tangencial.



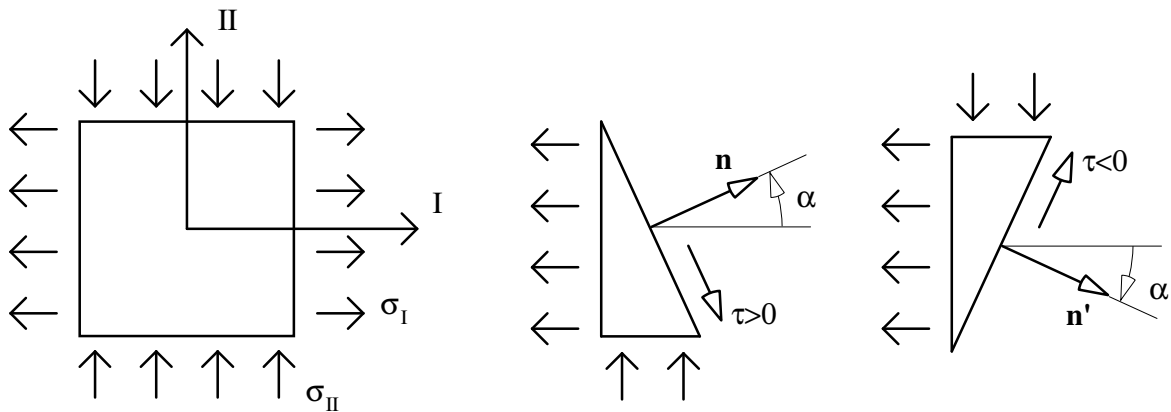
Figuras 2.24.- Convenciones para el diagrama de Mohr en problemas planos.

Es preciso insistir en que este convenio de signos se define con el único objetivo de sacar mayor partido de la representación de Mohr en problemas bidimensionales, y que no guarda ninguna relación con el convenio de signos adoptado para las componentes del tensor de tensiones. De hecho, ambos convenios son contradictorios entre sí, circunstancia ineludible que el lector debería asumir con urgencia. Por ejemplo, la primera figura 2.25 muestra un elemento diferencial de sólido en un problema bidimensional. Si las tensiones tangenciales tienen los sentidos especificados por las flechas, sus signos según el convenio de signos del diagrama de Mohr serían los indicados. Sin embargo, si consideramos un sistema de ejes 12 paralelos a las caras del elemento (no serían ejes principales, claro está), esas componentes de tensión tangencial serían todas positivas según el convenio de signos del tensor de tensiones. En la segunda figura 2.25 puede apreciarse también que, con este convenio, la tensión tangencial mantiene su signo al considerar el sólido a uno u otro lado del plano de corte.



Figuras 2.25.- Convenio de signos para τ , aplicable al diagrama de Mohr bidimensional.

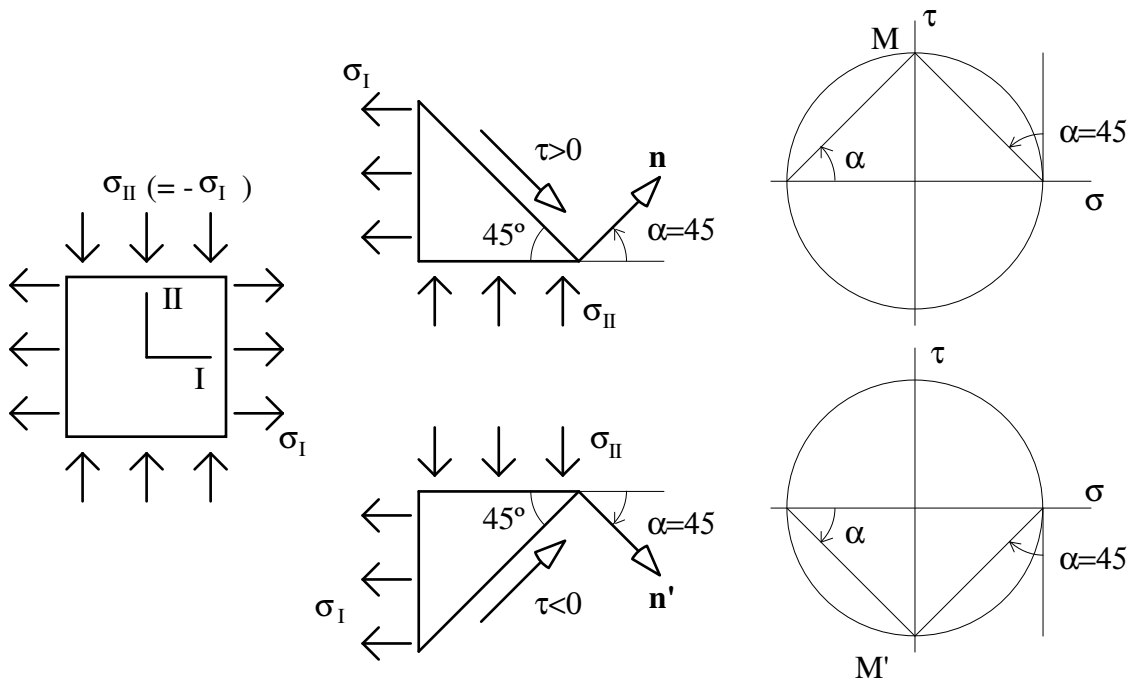
Sabemos que el módulo de la tensión tangencial será el mismo en un plano de orientación $+\alpha$ que en uno de orientación $-\alpha$ (notemos de paso que en problemas bidimensionales la orientación del plano queda definida por un sólo ángulo). Esto debe ser así porque siendo $n_1 = \cos \alpha$ obtenemos el mismo valor n_1 , y a la vista de las ecuaciones (2.24) ello implica la obtención del mismo valor de τ como escalar sin signo. Dado que ahora tenemos definido el signo de τ , nos preguntamos si ese signo se mantiene o no cuando cambiamos el signo de α . Para responder esta pregunta, podemos analizar un ejemplo sencillo como el de la figura 2.26.



Figuras 2.26.- Cambio de signo de τ al cambiar el sentido del ángulo α .

En este ejemplo τ cambia su signo al cambiar el sentido de α . Es fácil darse cuenta de que esto ocurrirá siempre, si observamos que la tercera figura puede obtenerse a partir de la segunda mediante una reflexión respecto del eje I, operación en la que el signo de τ siempre cambiará.

Lo anterior muestra que el haber establecido un convenio de signos para τ , conlleva el que sea necesario precisar el sentido de giro de α , que ahora no es indiferente. En el manejo del diagrama de Mohr se dará una de las dos situaciones siguientes: o bien el sentido de giro de α es el mismo en el espacio físico que en el diagrama, o bien es contrario. Para dilucidar cuál de las dos alternativas es la correcta, es suficiente analizar un caso particular como el mostrado en las figuras 2.27, en que $\sigma_I = -\sigma_{II}$.



Figuras 2.27.- El sentido de giro de α coincide en el espacio físico y en el diagrama.

En estas figuras apreciamos que si $\alpha = +45^\circ$ (asignaremos por ejemplo signo positivo a los ángulos en sentido antihorario), el equilibrio requiere que sólo exista tensión tangencial, y que ésta sea positiva. El diagrama de Mohr es una circunferencia de centro en el origen, y M debe ser el punto que represente al vector tensión en el plano correspondiente. Este punto se obtiene en el diagrama mediante un giro α del mismo sentido que el aplicado en el espacio físico. Se ilustra también el caso de $\alpha = -45^\circ$, en el que el punto representativo del vector tensión es M'. Como detalle final, recordemos que debido a las propiedades geométricas de la circunferencia, el ángulo α que forma un diámetro AB de la misma con una recta que pasa por uno de sus extremos A y por otro punto M de la circunferencia es la mitad del ángulo que forma el diámetro AB con la recta que pasa por M y por el centro de la circunferencia. Esta propiedad se ilustra en la figura 2.28. Su interés radica en que permite asegurar que los vectores tensión en dos planos perpendiculares entre sí estarán representados en puntos diametralmente opuestos en la circunferencia de Mohr.

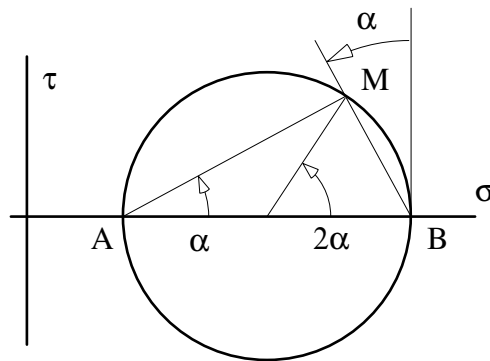
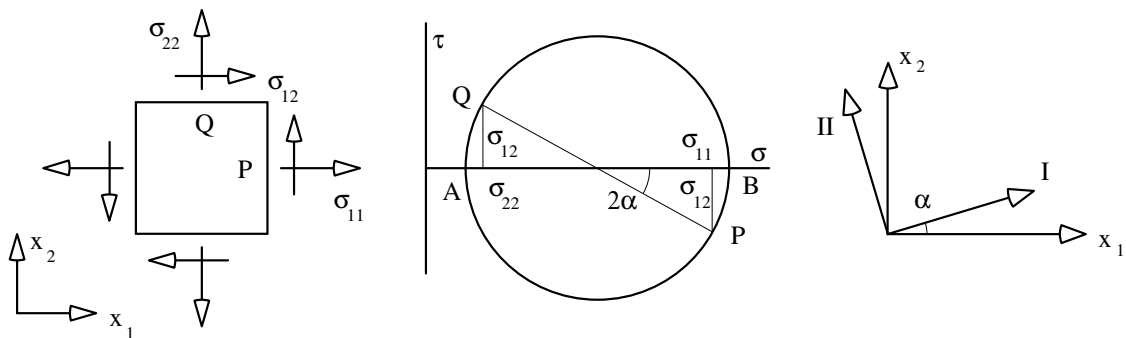


Figura 2.28.- Relación de ángulos en la circunferencia de Mohr.



Figuras 2.29.- Trazado del diagrama conocido el tensor de tensiones.

Una de las utilidades de esta propiedad la encontramos cuando necesitamos trazar el diagrama de Mohr a partir de las componentes del tensor de tensiones en unos ejes no principales. El procedimiento se ilustra en las figuras 2.29, en las que el estado de tensiones en el punto respecto de los ejes (x_1, x_2) se supone conocido. Comenzamos trazando el punto P del diagrama que representa la tensión en el plano que también hemos llamado P. Trazamos análogamente el punto Q. Como ambos planos forman 90° , sabemos que estarán representados en los extremos de un diámetro en el diagrama. Por tanto, el centro de la circunferencia estará en la intersección de la recta PQ con el eje σ , con lo que su trazado es ya inmediato. La construcción anterior permite saber también la

orientación de las direcciones principales. La dirección principal I se encontrará a un ángulo α de la normal al plano P, ángulo que tenemos trazado (como 2α). También se indica aproximadamente la orientación de las direcciones principales en este ejemplo.

2.7 .- Tensor medio y tensor desviador. Espacio de tensiones principales.

Dadas las componentes σ_{ij} del tensor de tensiones en un punto, es en ocasiones conveniente considerar su descomposición en suma de dos nuevos tensores, a los que llamaremos tensor medio (o tensor esférico) y tensor desviador. El primero es en cierto sentido una medida del nivel de presión hidrostática media en ese punto, tomando como valor de la presión el promedio de las tensiones principales, que podemos calcular como el primer invariante dividido entre tres. El segundo tensor contiene la desviación respecto de ese estado de presión hidrostática. Por tanto, estos tensores están definidos por:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^m + \sigma_{ij}^d \\ \sigma_{ij}^m &= (\sigma_{kk} / 3)\delta_{ij} = (I_1 / 3)\delta_{ij} \\ \sigma_{ij}^d &= \sigma_{ij} - (\sigma_{kk} / 3)\delta_{ij}\end{aligned}\tag{2.46}$$

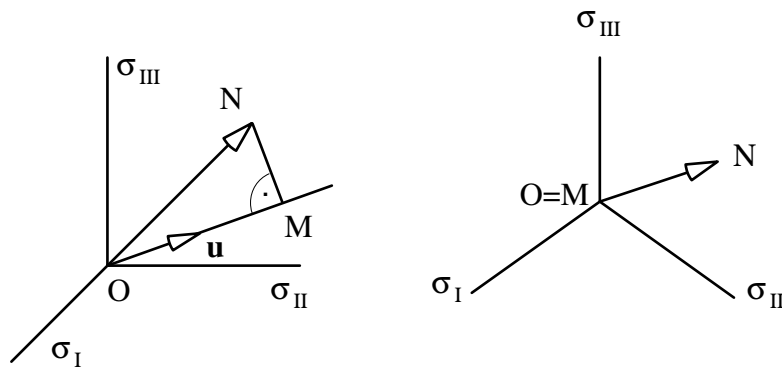
Puede demostrarse que las direcciones principales del tensor desviador son las mismas que las del tensor original. Omitimos esta demostración remitiéndonos a la propiedad, que el lector recordará de sus estudios de álgebra lineal, de que los vectores propios de una matriz cuadrada no varían si se suma una constante (en este caso $I_1/3$) a toda su diagonal. No obstante, podemos evidenciar esta propiedad junto con alguna otra mediante sencillos razonamientos sobre el diagrama de Mohr. Presentamos algunos de estos posibles razonamientos como un ejemplo más de las posibilidades que nos ofrece el manejar con soltura ese diagrama:

Supongamos que expresamos el tensor de tensiones en ejes principales, con lo que podemos imaginar trazado el diagrama inmediatamente. El tensor es diagonal en estos ejes, y al sumar una constante K a la diagonal, el tensor sigue siendo diagonal, luego las direcciones principales no han cambiado. El diagrama de Mohr sufrirá una traslación (de magnitud K) a lo largo del eje σ , manteniéndose su forma. Por tanto (piénsese en el enfoque gráfico), la tensión normal en cualquier plano dado, en particular en los definidos por unos ejes coordenados no principales, se verá incrementada en la misma constante K. Esto hace ver que el estado de tensión obtenido al sumar una constante a la diagonal no depende del sistema de ejes al que tuviésemos referido el tensor.

Por otra parte, la traslación del diagrama no afectará al cálculo de los valores de las tensiones tangenciales (piénsese nuevamente en el procedimiento gráfico), por lo que todos los planos mantendrán la misma tensión tangencial al sumar una constante a la diagonal del tensor.

En algunos textos el lector encontrará referencias al concepto de tensiones octaédricas. Se denomina así a las componentes del vector tensión en planos cuya normal \mathbf{n} está dirigida según alguna trisectriz de las direcciones principales. Puede demostrarse sin ninguna dificultad que la componente normal del vector tensión en estos planos, σ^{oct} , coincide con la tensión media σ^m . Es evidente que estos planos "octaédricos" tienen además una componente no nula de tensión tangencial.

La descomposición del tensor de tensiones en un punto en sus componentes media (o esférica) y desviadora, admite una visualización cómoda representando el estado de tensión en un espacio descrito por unas coordenadas cartesianas que son los valores de las tensiones principales. En este espacio, todos los posibles tensores esféricos estarán representados en la trisectriz de los ejes coordenados. En la primera figura 2.30 se muestra este espacio de tensiones principales, así como la trisectriz mencionada, cuyo vector director unitario es \mathbf{u} , de componentes $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.



Figuras 2.30.- Espacio de tensiones principales.

Si el punto $N(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$ de este espacio representa nuestro estado de tensión, la componente de tensión media (o esférica) está representada por el punto M , obtenido mediante la proyección del vector \mathbf{ON} sobre la trisectriz. Véase:

$$|\mathbf{OM}| = \mathbf{ON} \cdot \mathbf{u} = \sigma^m \sqrt{3}$$

$$\mathbf{OM} = |\mathbf{OM}| \mathbf{u} = (\sigma^m, \sigma^m, \sigma^m)$$

Por lo tanto, la componente desviadora del tensor de tensiones está representada por \mathbf{MN} . Si observamos esta representación desde una perspectiva isométrica, la componente \mathbf{OM} se confunde en un punto con el origen, mientras que la componente desviadora \mathbf{MN} se aprecia en su verdadera magnitud, como muestra la segunda de las figuras 2.30. Esta representación isométrica del espacio de tensiones principales se conoce como representación de Haig-Westergaard.

Parece obligado un comentario final acerca de la posible utilidad de la descomposición anterior del tensor de tensiones. Existen muchos materiales de interés en los que el límite de comportamiento elástico lineal depende sólo de la componente desviadora del tensor de tensiones, siendo este hecho lo que justifica la descomposición aludida. Incidiremos con mayor profundidad sobre ello en un capítulo posterior.

2.8.- Propiedades compartidas por otras magnitudes tensoriales.

Como se indicó en el capítulo primero, existen muchas magnitudes de la física que tienen carácter tensorial. Aprovecharemos el esfuerzo que hemos dedicado al estudio del tensor de tensiones poniendo de manifiesto las propiedades ya estudiadas del mismo que también poseerán otros tensores. Resulta claro que estas propiedades comunes serán las que deriven de la ley de transformación de los tensores. Es notorio que en realidad casi todos los desarrollos de este capítulo están precisamente basados en la ley de transformación. Sólo las ecuaciones de equilibrio (2.9) y (2.10) derivan de la naturaleza de fuerzas por unidad de superficie de las componentes del tensor de tensiones, no habiendo motivo para que estas ecuaciones sean satisfechas por otros tensores.

La ecuación de equilibrio (2.10) expresa que el tensor de tensiones será simétrico. Tensores de diferente naturaleza pueden ser simétricos por otros motivos (no procederá en general aplicar razonamientos de equilibrio; piénsese por ejemplo en el tensor de inercia). De hecho muchos tensores de interés son simétricos, entre ellos los enumerados a título de ejemplo en el epígrafe 1.3, y el tensor que representa a la magnitud que definiremos como deformación en el capítulo siguiente. Repasemos por tanto estas propiedades comunes a los tensores simétricos de orden dos. Dado un tensor simétrico β_{ij} asociado a un punto del espacio, es posible:

- Definir un vector \mathbf{b} en ese punto asociado a cada dirección \mathbf{n} , cuyas componentes están dadas por $b_i = \beta_{ij} n_j$
- Encontrar tres direcciones principales $\mathbf{n}^I, \mathbf{n}^{II}, \mathbf{n}^{III}$, perpendiculares entre sí, en las que el vector \mathbf{b} tiene la misma dirección que \mathbf{n} . Los tres valores de $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}$ correspondientes serán los valores principales del tensor.
- Calcular los máximos de la componente tangencial de \mathbf{b} , utilizando expresiones análogas a las presentadas en el epígrafe 2.5.
- Utilizar la representación de Mohr de manera totalmente análoga a como se ha desarrollado en el epígrafe 2.6, con todas sus particularidades. Se han de representar las componentes normal y tangencial del vector \mathbf{b} .
- Descomponer el tensor en sus componentes media y desviadora, y realizar representaciones en el espacio valores principales, si ello tiene interés para la magnitud tensorial en cuestión.

Hay que notar que las componentes normal y tangencial de \mathbf{b} (asociado a \mathbf{n}) pueden no tener siempre un significado físico tan claro como en el caso del tensor de tensiones. Por esto mismo es útil tener en cuenta que la componente normal siempre sería un término de la diagonal del tensor si adoptásemos unos ejes de forma que uno de ellos tenga la dirección de \mathbf{n} . La componente tangencial sería el módulo de la composición vectorial de dos términos no diagonales del tensor, o bien sería directamente la componente no diagonal si el problema es bidimensional.

Es instructivo el intentar plantear situaciones en que podamos aplicar las propiedades estudiadas en el contexto de la tensión a otras magnitudes tensoriales. Por ejemplo, es interesante el caso de presión hidrostática, en el que sabemos que las tres

tensiones principales son iguales, y que por tanto el diagrama de Mohr se reduce a un punto, resultando que cualquier dirección es principal y tiene el mismo valor de tensión principal. Presentamos seguidamente a título de ejemplo algunas curiosidades relacionadas con este tipo de estados en los que el diagrama de Mohr se reduce a un punto:

- En el estudio del movimiento del sólido rígido en el espacio es de interés la magnitud "tensor de inercia" I_{ij} respecto de un punto, que generalmente es el centro de masas del sólido. Si el sólido es tal que podemos apreciar que tres ejes perpendiculares que pasan por el centro de masas son principales de inercia y tienen asociado el mismo momento de inercia ($I_{xx}=I_{yy}=I_{zz}$) como ocurre por simetría en el sólido de la figura 2.31, entonces el diagrama de Mohr se reduce a un punto, y cualquier recta que pase por el punto considerado del sólido será eje principal de inercia, y el momento de inercia correspondiente será el mismo. El saber esto nos puede ahorrar cálculos molestos de integrales que contengan distancias respecto de una recta de orientación arbitraria.

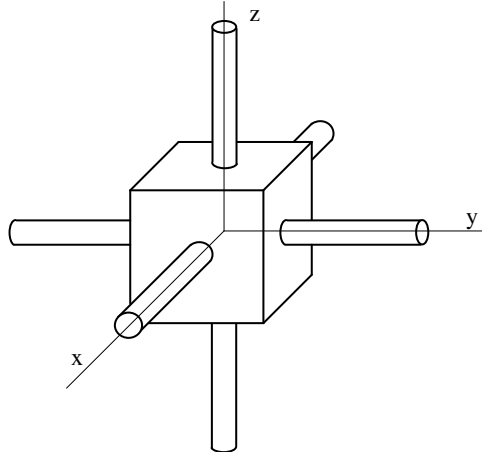


Figura 2.31.- Sólido cuyo tensor de inercia respecto del centro de masas se reduce a un punto en la representación de Mohr.

- En la disciplina de Resistencia de Materiales es de interés la magnitud "tensor de inercia de áreas", cuyas componentes son los momentos y productos de inercia del área de la sección transversal de la barra respecto de unos ejes que pasan por un punto dado, que frecuentemente es el centro de áreas de la sección. Nuevamente, si apreciamos que dos ejes perpendiculares que pasan por el punto son principales, y tienen el mismo momento de inercia, podemos asegurar que cualquier otro eje que pase por el punto será principal de inercia, y con el mismo valor del momento de inercia. Seguramente este resultado no resultaría tan obvio para el lector a partir de la simple inspección de secciones como las mostradas en la figura 2.32.

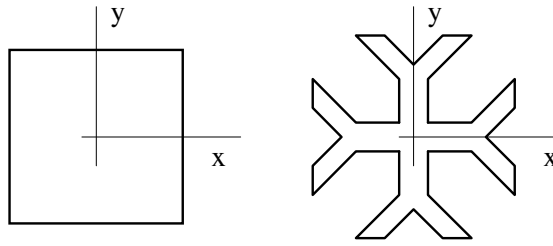
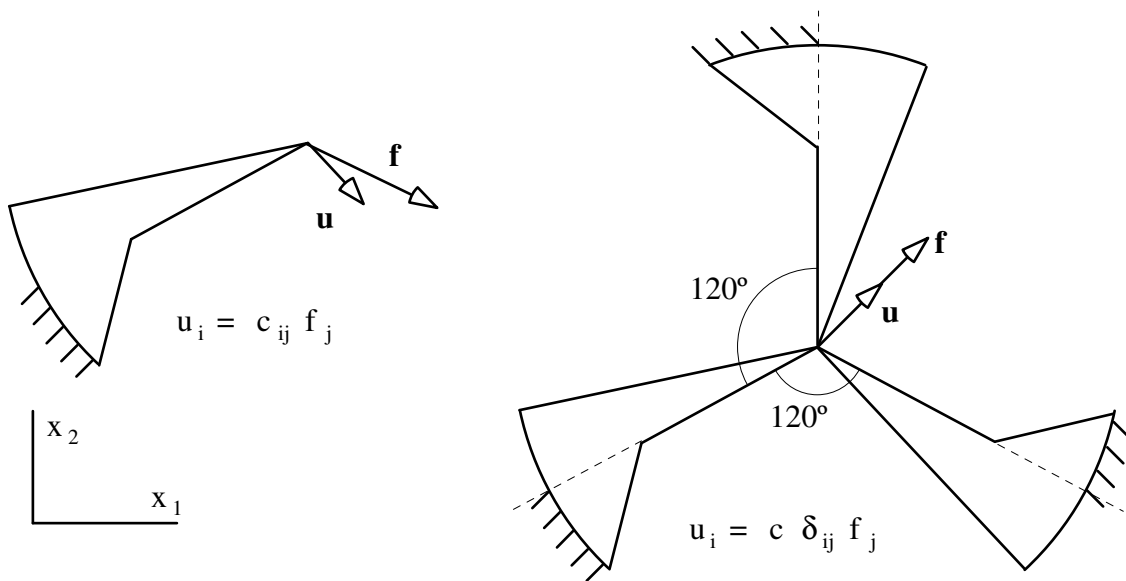


Figura 2.32.- Secciones de barras cuyo tensor de inercia respecto del centro de áreas se reduce a un punto en la representación de Mohr.



Figuras 2.33.- Relaciones lineales entre carga y desplazamiento.

- En el ámbito de la mecánica lineal de sólidos, el vector desplazamiento de un punto del sólido, \mathbf{u} , está relacionado con el vector fuerza puntual \mathbf{f} aplicado en el mismo punto, mediante un tensor simétrico \mathbf{c} que depende del punto considerado (ello se justificará en un capítulo posterior, al estudiar los teoremas integrales). Adoptando un sistema de ejes (x_1, x_2, x_3) las componentes de \mathbf{u} y \mathbf{f} están relacionadas por los "coeficientes de influencia" representados en las componentes del tensor, mediante $u_i = c_{ij} f_j$. En general, el desplazamiento no tendrá la dirección de la fuerza, como se indica en el sólido bidimensional de la primera figura 2.33. Si disponemos en el plano un número cualquiera de sólidos iguales (más de dos) conectados entre sí por el punto donde aplicaremos la fuerza, de forma que la distancia angular entre ellos sea constante, obtenemos una estructura como la mostrada en la segunda figura 2.33. Supongamos aplicada una fuerza (podemos pensar que es unitaria para que su analogía con el vector \mathbf{n} que asociamos al tensor de tensiones sea más patente) en una dirección cualquiera. En principio no sabemos que dirección tendrá el desplazamiento, pero si giramos la fuerza un ángulo igual al que forman los sólidos entre sí (120° en la figura), obtenemos una configuración análoga a la inicial, pero girada ese mismo ángulo. Las componentes intrínsecas (normal y tangencial) del desplazamiento serán por tanto las

mismas, lo que también ocurrirá si aplicamos sucesivos giros del mismo valor a \mathbf{f} . Ahora bien, pensando en el diagrama de Mohr asociado al tensor c_{ij} , lo anterior significa que sucesivos giros del valor correspondiente en el diagrama (240° en el ejemplo de la figura) deben conducir al mismo punto del diagrama. El único diagrama de Mohr en el que esto es posible es el que se reduce a un punto. Como sabemos, esto implica que todas las direcciones serán principales, es decir que el desplazamiento siempre tendrá lugar en la misma dirección que la fuerza aplicada, y además que la constante de proporcionalidad entre la fuerza y el desplazamiento será independiente de la orientación de la fuerza.

Bibliografía:

- FUNG, Y.C., "Foundations of solid mechanics", Prentice-Hall
BARBER, J.R., "Elasticity", Kluwer Academic Publishers
PARIS, F., "Teoría de la Elasticidad", ETSII-Univ. Sevilla
ORTIZ, L., "Elasticidad", ETSII-Univ. Politécnica de Madrid.