ELASTICIDAD

Juan Carlos del Caño Sánchez
Dr. Ingeniero Industrial
Profesor titular

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Valladolid

Capítulo 1

Introducción.

En el estudio de la Teoría de la Elasticidad, al igual que en el estudio de cualquier otra materia, es conveniente comenzar por establecer cuál será el ámbito de aplicación, las hipótesis básicas, y las limitaciones o posibles extensiones del modelo teórico que nos disponemos a desarrollar. Es además particularmente necesario en este caso presentar la notación que se utilizará, y algunos conceptos matemáticos que el lector puede no conocer. Todo ello constituye un material idóneo para un capítulo de introducción como el presente.

1.1.- Objeto de la Teoría de la Elasticidad.

La Mecánica Racional se ocupa típicamente del estudio del punto material y del sólido rígido. Estos dos conceptos son abstracciones -entes creados por la razón humana-, que han mostrado ser sumamente útiles para el mejor entendimiento de muchos aspectos del comportamiento de los sólidos reales. Sin embargo, éstos siempre se deforman bajo la acción de las cargas que les son aplicadas, existiendo un gran número de aplicaciones prácticas en cuyo estudio es necesario considerar la deformación, y que en consecuencia requieren herramientas de análisis distintas de las proporcionadas por la Mecánica Racional.

La Teoría de la Elasticidad intenta dar respuesta al requerimiento anterior, siendo su propósito describir el comportamiento del sólido deformable desde el punto de vista macroscópico propio de la mecánica de los medios continuos. El modelo matemático que se construye para describir el comportamiento del sólido, que en principio puede tener geometría y cargas cualesquiera, tiene como incógnitas fundamentales los desplazamientos de los puntos del sólido. Desde el punto de vista práctico, resulta además importante predecir si el sólido se romperá (o también si su comportamiento se alejará significativamente de las hipótesis del modelo matemático), lo que le impediría desempeñar la misión resistente para la que fue concebido. Finalmente, desearemos realizar el diseño del sólido resistente de forma que resulte económico, o conveniente en algún otro sentido, manteniéndose las características funcionales requeridas.

La Resistencia de Materiales se ocupa del estudio de los sólidos deformables que presentan ciertas peculiaridades geométricas (típicamente forma de barra), bajo las mismas hipótesis generales y con los mismos propósitos que la Teoría de la Elasticidad. Es del mayor interés el estudio pormenorizado de las simplificaciones que estas peculiaridades geométricas permiten, dado que la inmensa mayoría de los elementos resistentes que se diseñan tienen forma de barra (una dimensión espacial es mucho mayor que las otras dos), o forma de placa (una dimensión espacial es mucho menor que las otras dos). La frontera entre la Teoría de la Elasticidad y la Resistencia de Materiales es por tanto imprecisa, y el estudio de ciertos tipos de problemas en uno u otro contexto es en muchos casos una cuestión de tradición histórica.

En el establecimiento de los principios básicos de la Teoría de la Elasticidad cabe destacar las aportaciones fundamentales de A.L. Cauchy (1789-1857) y de L.M.H. Navier (1785-1836). Desde entonces han sido muchas las técnicas matemáticas que se han desarrollado sobre esas mismas bases para estudiar nuevos y cada vez más complejos problemas, como el comportamiento de materiales para construcción y de materiales especiales, la propagación de grietas, el contacto entre sólidos, el acoplamiento de fenómenos elásticos y térmicos, y la interacción de un sólido elástico con un fluido circundante, entre otros muchos. La consideración o no de diversos efectos (dinámicos, temperatura,...), o de diversas hipótesis (respecto del tipo de respuesta del material a las cargas, de la magnitud de los movimientos y de los cambios de forma,...), conduce a complicaciones o simplificaciones en el modelo matemático.

Este texto pretende introducir al lector en los aspectos elementales de la Teoría de la Elasticidad, proporcionándole información adecuada para la posterior profundización en aspectos más específicos de la mecánica de sólidos, que no serán tratados aquí.

1.2.- Hipótesis básicas.

Adoptaremos en nuestro estudio las hipótesis más simplificativas que pueden considerarse en mecánica de sólidos. Estas hipótesis se enumeran a continuación.

1.- Homogeneidad: cualquier elemento de volumen del sólido tendrá idénticas propiedades físicas.

2.- Isotropía: las propiedades físicas del material no dependerán de la dirección en que estas sean observadas o medidas.

3.- Ausencia de efectos dinámicos: las cargas son aplicadas con lentitud, lo que produce una evolución lenta de desplazamientos que permite despreciar los llamados efectos de inercia. Como consecuencia, el equilibrio estático de cualquier porción del sólido debe satisfacerse en cualquier instante durante el proceso de carga.

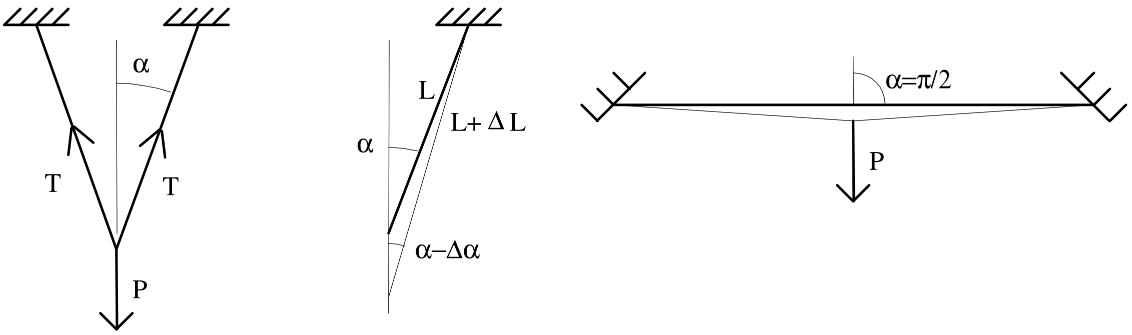
4.- Comportamiento elástico del material: el sólido recupera su geometría inicial cuando cesa la aplicación de las cargas.

5.- Comportamiento lineal del material a nivel local. Consiste en lo siguiente: imaginemos aislada una pequeña porción de sólido (un diferencial de volumen), que está sometida a idénticas acciones a las que el resto del sólido ejercía sobre ella. Si multiplicamos el valor de esas acciones por un cierto número, el alargamiento o acortamiento que se obtiene para cualquier línea contenida en el diferencial de volumen quedará multiplicado por el mismo número.

6.-Los desplazamientos y sus derivadas espaciales primeras (directamente relacionadas con las magnitudes que más tarde llamaremos deformaciones) son pequeños. En muchos casos esto posibilita el planteamiento del equilibrio en la configuración indeformada con un error despreciable, dado que normalmente se mantendrán sin cambios significativos las líneas de acción de las fuerzas, y los demás elementos que intervienen en el planteamiento del equilibrio estático.

Es de gran interés saber si en un problema dado los desplazamientos y deformaciones guardarán una relación lineal con el nivel de cargas exteriores, porque en este caso resultará aplicable el *principio de superposición de efectos*, del que haremos uso ocasional en los capítulos siguientes. Las hipótesis anteriores, significativamente las de comportamiento elástico lineal del material, junto con la de que los desplazamientos y sus derivadas son pequeños, conllevan muy frecuentemente la relación lineal entre las cargas y los desplazamientos o deformaciones, pero no siempre es así.

Para identificar las eventuales excepciones, podemos enunciar esta sencilla regla: cualquier problema en que resulte necesario plantear el equilibrio en la configuración deformada presentará en general relaciones no lineales entre las cargas aplicadas y los desplazamientos (o deformaciones). Y ello aunque el material conserve comportamiento lineal a nivel local, y los desplazamientos y deformaciones sean pequeños. Frecuentemente se denomina "*no linealidad geométrica*" a este tipo de no linealidad, de la que el fenómeno de inestabilidad de barras comprimidas, que suele estudiarse en el contexto de la Resistencia de Materiales, es un ejemplo de gran interés práctico. Para ilustrar ahora el efecto de no linealidad geométrica es preferible el ejemplo más sencillo que se muestra en las figuras 1.1.



Figuras 1.1.- Ejemplo de problema con no linealidad geométrica

Se trata de un cable sujeto por sus extremos y con una fuerza P aplicada en su centro, según se indica. En el caso sencillo de cables, el comportamiento lineal del material a nivel local, que asumiremos en nuestro análisis, conduce a:

$$T = K\,\Delta L$$

siendo T la fuerza en el cable , ΔL su incremento de longitud, y K una constante que depende de las características del cable. Si planteamos el equilibrio en la configuración indeformada, obtenemos que el alargamiento de cada mitad del cable es $\Delta L = P/(2K\cos\alpha)$, lo que constituye una relación lineal con P. Sin embargo, el equilibrio en la configuración deformada -la única que realmente existe-, viene dado por:

$$P = 2T\cos(\alpha-\Delta\alpha) = 2K\,\Delta L\cos(\alpha-\Delta\alpha)$$

En donde podemos eliminar $\Delta\alpha$ utilizando una relación geométrica, como por ejemplo:

$$L\,\mathrm{sen}\,\alpha = (L+\Delta L)\,\mathrm{sen}\,(\alpha-\Delta\alpha)$$

Resultando que:

$$\frac{P}{2KL} = \frac{\Delta L}{L}\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{1+\Delta L/L}\right)^2}$$

Lo que claramente supone una relación no lineal entre P e ΔL, a pesar de haberse supuesto comportamiento lineal del material. Apreciamos sin embargo que la condición de pequeñas deformaciones y pequeños desplazamientos $\Delta L/L \ll 1$ hace degenerar a la ecuación anterior hacia la misma relación lineal obtenida al plantear el equilibrio en la configuración indeformada. Pero esto no es así en todos los casos, ya que cuando $\alpha=\pi/2$, la ecuación anterior se convierte en:

$$\frac{P}{2KL} = \frac{\sqrt{2+\Delta L/L}}{1+\Delta L/L}(\Delta L/L)^{3/2}$$

que es una relación no lineal aún en el caso en que $\Delta L/L \ll 1$. Como indica la tercera de las figuras 1.1, en el caso de $\alpha=\pi/2$, el sistema no puede alcanzar el equilibrio sin que varíe α, por lo que no es posible plantear el equilibrio en la configuración indeformada.

Del sencillo ejemplo anterior podemos extraer la enseñanza importante de que la linealidad del comportamiento del material junto con que los desplazamientos y deformaciones sean pequeños, no son condiciones suficientes para asegurar la existencia de un relación lineal entre cargas y deformaciones. Tal como habíamos anticipado, si el cambio de geometría, aunque sea pequeño, juega un papel importante en el equilibrio del sólido, puede darse el efecto de *no linealidad geométrica*. A falta de contraejemplos conocidos, consideraremos suficiente para que exista relación lineal entre cargas y deformaciones el que se cumplan las hipótesis 3, 4, 5 y 6, junto con el que el planteamiento del equilibrio en la configuración indeformada suponga un error despreciable. Desafortunadamente, la única manera formalmente correcta de justificar si esto último se dará o no en un problema dado, es resolviendo el problema en la configuración deformada y procediendo después a realizar las simplificaciones oportunas. En la gran mayoría de los casos nos ahorraremos este esfuerzo, haciendo en su lugar una apreciación física *a priori* acerca de si los cambios geométricos intervendrán o no significativamente en el planteamiento del equilibrio del sólido.

Merece la pena apuntar finalmente que aunque las hipótesis que adoptamos son las más simplificativas que cabe plantear en el estudio del sólido deformable, el modelo matemático que construiremos en base a las mismas será útil para muchos propósitos prácticos, resultando por ejemplo un excelente punto de partida para abordar el estudio de los temas típicos de la Resistencia de Materiales. Indiquemos también en este sentido que los materiales metálicos, y de modo destacado el acero, son en general muy aproximadamente homogéneos e isótropos, presentando comportamiento elástico y lineal en condiciones habituales de servicio, en las que además los desplazamientos y sus derivadas suelen ser muy pequeños. La Teoría Lineal de la Elasticidad encuentra su campo de aplicación más idóneo cuando se dan estas circunstancias.

1.3.- Preliminares matemáticos.

Notación

Para favorecer la concisión, en el desarrollo de este texto nos apoyaremos en una notación abreviada que es de uso frecuente en la literatura de investigación. La pequeña inversión de tiempo que requiere familiarizarse con ella es ampliamente recompensada en el desarrollo de la teoría general. Utilizaremos tipo de letra negrita para notar vectores, y ocasionalmente también para matrices. Para relaciones tipo "sistema de ecuaciones" adoptaremos, por razones de eficiencia, el tipo de notación sistemática que se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

La ecuación anterior puede ser escrita en forma más concisa como

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1,2,3) \tag{1.2}$$

La simplificación final en la notación consiste en omitir el símbolo de sumatorio, con lo que en lo sucesivo entenderemos, salvo mención expresa en contrario, que un subíndice que se repite (j en la ecuación 1.2) en un producto de magnitudes (a y x en 1.2), indica un sumatorio que afecta a ese subíndice. Con esta consideración (1.1) queda de la forma:

$$a_{ij} x_j = b_i \tag{1.3}$$

A los subíndices que, como j en la expresión anterior, implican sumatorio, se les llama subíndices mudos, y a los que como i no implican sumatorio se les llama subíndices libres. En cualquier expresión podemos sustituir el símbolo utilizado para un subíndice mudo por otro cualquiera (excepto por los que ya figuren como subíndices en la expresión), sin que se altere su significado. Apréciese que con esta notación el orden en que se escriben los factores es indiferente, contrariamente a lo que ocurre con la notación matricial. También entenderemos que existe sumatorio cuando el subíndice se repita en la misma magnitud; por ejemplo expresaremos la traza de la matriz de coeficientes de (1.1) como:

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{ii} \tag{1.4}$$

Sean x_1, x_2, x_3, unas coordenadas cartesianas (salvo indicación en contrario, asumiremos que los sistemas de coordenadas que utilizamos son cartesianos) que describen el espacio tridimensional. La derivada parcial de una magnitud, digamos f, respecto de una de las coordenadas, digamos x_1, será denotada con un subíndice que indica la coordenada respecto de la que se deriva, al que se le antepone una coma. Así por ejemplo $\partial f/\partial x_1 = f_{,1}$ La magnitud a derivar puede a su vez tener subíndices, aplicándose también el convenio de suma. Por ejemplo, la siguiente expresión se abrevia notablemente:

$$\begin{aligned} &x_1(\partial a_{11}/\partial x_1 + \partial a_{12}/\partial x_2 + \partial a_{13}/\partial x_3) + \\ &x_2(\partial a_{21}/\partial x_1 + \partial a_{22}/\partial x_2 + \partial a_{23}/\partial x_3) + \\ &x_3(\partial a_{31}/\partial x_1 + \partial a_{32}/\partial x_2 + \partial a_{33}/\partial x_3) = a_{ij,j}x_i \end{aligned} \tag{1.5}$$

Puede haber varios subíndices tras la coma, lo que indica derivación respecto de cada una de las coordenadas correspondientes, manteniéndose en todo caso el convenio de suma. Por ejemplo el operador Laplaciano se expresa en esta notación mediante un subíndice repetido tras la coma:

$$\nabla^2 f = \partial^2 f/\partial x_1^2 + \partial^2 f/\partial x_2^2 + \partial^2 f/\partial x_3^2 = f_{,jj} \tag{1.6}$$

El convenio de suma no se aplica a sumas de magnitudes (por ejemplo en $f_i + g_i$ no se sobreentiende ningún sumatorio). Nótese que para que se mantenga la asociatividad entre los factores, no debe aparecer mas de dos veces un mismo subíndice de suma en un mismo término (por ejemplo $a_ib_ic_i$ será una expresión sin sentido en nuestro contexto). Salvo indicación en contrario, suele entenderse que el rango de valores de los subíndices coincide con el número de dimensiones del espacio: 1,2 para casos bidimensionales o 1,2,3 para tridimensionales. Se atribuye a Albert Einstein la introducción de la notación con convenio de suma. Esta notación es especialmente conveniente cuando se usa en combinación con el concepto de tensor, que será presentado más tarde.

Existen dos convenciones para las que reservaremos una notación particular: la conocida "delta de Kronecker", y el "símbolo de permutación". La función delta de Kronecker se define mediante:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} \tag{1.7}$$

Teniendo en cuenta el convenio de suma, es inmediato apreciar que $\delta_{ij}\, b_j = b_i$, por lo que a veces se llama operador de sustitución al delta de Kronecker. Es también inmediato comprobar que $\delta_{ii} = 3$. Por otra parte, definimos el símbolo de permutación como:

$$e_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i) \quad ; \quad i,j,k = 1...3 \tag{1.8}$$

en donde no se sobreentiende suma en el miembro derecho, ya que los símbolos no figuran como subíndices. Por sustitución directa se comprueba que:

$$e_{ijk} = \begin{cases} 0 \text{ si uno o más subíndices se repiten} \\ -1 \text{ si ijk no está en la secuencia 12312} \\ 1 \text{ si ijk está en la secuencia 12312...} \end{cases} \tag{1.9}$$

El símbolo de permutación y la delta de Kronecker satisfacen la siguiente relación:

$$e_{ijk}e_{ist} = \delta_{js}\delta_{kt} - \delta_{jt}\delta_{ks} \tag{1.10}$$

Mediante el símbolo de permutación es posible expresar en forma concisa algunas operaciones vectoriales de uso frecuente. Sean por ejemplo b_i y c_i las componentes de los vectores **b** y **c** en una cierta base asociada a un sistema de ejes cartesianos. Puede comprobarse que el producto vectorial **b**×**c** tiene como resultado un vector **p** cuyas componentes p_k en la misma base vienen dadas por

$$\mathbf{p} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} \qquad \Rightarrow \qquad p_k = e_{ijk} b_i c_j = e_{kij} b_i c_j \tag{1.11}$$

Es inmediato comprobar que las componentes r_i del rotacional de un campo vectorial w_i pueden expresarse como:

$$\mathbf{r} = \mathbf{rot\ w} \qquad \Rightarrow \qquad r_i = e_{ijk}\, w_{k,j} \tag{1.12}$$

Utilizando la notación indical se simplifican las demostraciones de muchas propiedades de los campos vectoriales. Por ejemplo, el hecho conocido de que la divergencia del rotacional de un campo vectorial **w** es siempre nulo resulta prácticamente inmediato sin más que observar su expresión: div **rot w** = $(e_{ijk}\, w_{k,j})_{,i} = e_{ijk}\, w_{k,ji}$. Para un valor de k cualquiera, existirán 9 sumandos correspondientes a la variación de i, j, desde 1 hasta 3. De ellos, los tres que tienen i=j se anulan por anularse el símbolo de permutación, y los seis restantes se cancelan por parejas, dado que al intercambiar los valores de i, j, entre sí, se obtienen sumandos idénticos pero con signo cambiado. En efecto: $e_{ijk} = -e_{jik}$; $w_{k,ji} = w_{k,ij} \Rightarrow e_{ijk}\, w_{k,ji} = -e_{jik}\, w_{k,ij}$ (sin convenio de suma). Así:

$$\text{div } \mathbf{rot\ w} = e_{ijk}\, w_{k,ji} = 0 \tag{1.13}$$

El producto triple de tres vectores **a**,**b**,**c**, se define como v = **a**×**b.c** , y su resultado es un escalar cuyo valor coincide con el volumen del paralelepípedo que definen los tres vectores. Teniendo en cuenta (1.12) y que el producto escalar de dos vectores de componentes p_k y c_k puede expresarse como $p_k c_k$, el triple producto de vectores queda:

$$v = \mathbf{a} \times \mathbf{b.c} = e_{ijk} a_i b_j c_k \tag{1.14}$$

Cambio de base

Sea un sistema directo de ejes coordenados cartesianos x_1,x_2,x_3, que tiene asociada una base de vectores unitarios $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$, y otro sistema también cartesiano $x_{1'},x_{2'},x_{3'}$ girado respecto del anterior, con vectores asociados $\mathbf{e}_{1'},\mathbf{e}_{2'},\mathbf{e}_{3'}$, como se indica en la figura 1.2. Aunque un vector representa una entidad física que existe independientemente de que se defina o no un sistema de ejes coordenados, sus componentes varían con la elección particular del sistema de ejes, resultando distintas representaciones del mismo vector. Así, el vector **r** puede ser expresado en función de sus coordenadas en uno u otro sistema de ejes:

$$\mathbf{r} = x_i\, \mathbf{e}_i = x_{i'}\, \mathbf{e}_{i'} \tag{1.15}$$

multiplicando escalarmente la ecuación anterior por $\mathbf{e}_{k'}$, y teniendo en cuenta la evidencia de que $\mathbf{e}_{i'}\mathbf{e}_{k'} = \delta_{i'k'}$, se llega inmediatamente a:

$$x_{k'} = a_{k'i}\, x_i \tag{1.16}$$

$$\text{siendo} \quad a_{k'i} = \mathbf{e}_{k'}\mathbf{e}_i = \cos(\mathbf{e}_{k'}, \mathbf{e}_i)$$

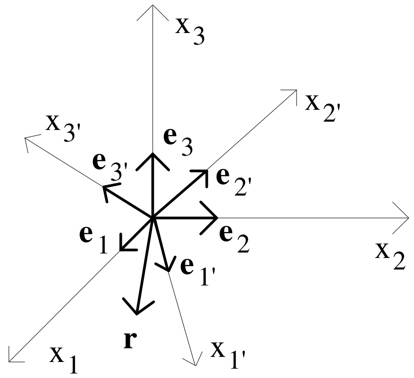


Figura 1.2.- Rotación del sistema de ejes coordenados.

Un desarrollo similar permite demostrar la relación homóloga $x_k = a_{ki'}\, x_{i'}$. La relación (1.16) es la ecuación de cambio de base de vectores, expresada en notación indical. En ocasiones desearemos expresar relaciones como la (1.16) en forma matricial. Para ello basta con ajustarse a la regla de escribir el producto de matrices en el orden que resulta en la expresión de subíndices cuando cada último subíndice de una magnitud coincide con el primero de la siguiente. Como (1.16) ya está escrita en esta forma (el último subíndice de $a_{k'i}$ y el primero de x_i coinciden), esta ecuación es equivalente a:

$$\begin{bmatrix} x_{1'} \\ x_{2'} \\ x_{3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1'1} & a_{1'2} & a_{1'3} \\ a_{2'1} & a_{2'2} & a_{2'3} \\ a_{3'1} & a_{3'2} & a_{3'3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{o simbólicamente} \quad \mathbf{x'} = \mathbf{a}\ \mathbf{x} \tag{1.17}$$

Es bien conocido que la matriz **a** es ortogonal (su inversa coincide con su traspuesta), por ser la matriz de cambio de base asociada a dos triedros ortogonales directos. De la definición de $a_{ij'}$ es inmediato que $a_{12'} = a_{2'1}$, etc, lo que no quiere decir que al emplear notación matricial, **a** resulte una matriz simétrica. Véase que no lo es:

$$\mathbf{a} = (a_{i'i}) = \begin{bmatrix} \cos(1'1) & \cos(1'2) & \cos(1'3) \\ \cos(2'1) & \cos(2'2) & \cos(2'3) \\ \cos(3'1) & \cos(3'2) & \cos(3'3) \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

Hay que notar que en general el que $z_{ij} = z_{ji}$ sí tiene la implicación de que la matriz asociada a la magnitud **z** sea simétrica, siendo $a_{k'k}$ una excepción debido al especial significado que hemos dado a los subíndices en este caso. Finalmente, derivando (1.16) respecto de x_k se tiene que $x_{k',k} = a_{k'i}x_{i,k} = a_{k'i}\ \delta_{ik} = a_{k'k}$. Es decir:

$$a_{k'k} = x_{k',k} \tag{1.19}$$

Tensores en coordenadas cartesianas

Como veremos, el carácter tensorial (o no tensorial) de una magnitud se establece en base a como se transforman sus componentes frente a cambios de sistemas de coordenadas. Cuando sólo se emplean sistemas de coordenadas cartesianas se habla de tensores en coordenadas cartesianas, como un caso particular respecto de la definición general de tensor, en la que se consideran transformaciones entre sistemas de coordenadas más generales. En lo que sigue se asume que los sistemas de coordenadas utilizados son cartesianos. Las leyes de transformación (de las magnitudes que definiremos como tensores) entre sistemas cartesianos, caracterizan el álgebra de tensores en coordenadas cartesianas, o abreviadamente de tensores cartesianos.

Aunque la concepción de vector como una entidad con módulo y dirección tiene un considerable atractivo físico, vamos a presentar un punto de vista alternativo que tiene la ventaja de ser inmediatamente generalizable. La relación entre las componentes de un vector en dos sistemas -sin prima y con prima-, como los mostrados en la figura 1.2, viene dada por (1.16). Podemos adoptar esta relación como definición de vector, y diremos así que una entidad matemática de tres componentes β_i será un vector sólo si sus componentes se transforman de acuerdo con (1.16). De modo natural podemos plantear la siguiente generalización para objetos matemáticos que tengan más de un subíndice:

$$\beta_{i'j'k'...l'} = a_{i'i}\ a_{j'j}\ a_{k'k} \cdots a_{l'l}\quad \beta_{ijk...l} \tag{1.20}$$

Si el objeto matemático $\beta_{ijk...l}$ transforma sus componentes en distintos sistemas de ejes cartesianos de acuerdo con (1.20), entonces diremos que es un tensor cartesiano. Llamaremos orden del tensor al número de subíndices que posea. El número de componentes de un tensor es igual a la dimensión del espacio (en general 3) elevado al orden del tensor. Así, un tensor de orden 2 tiene 9 componentes, uno de orden 3 tiene 27 componentes, etc. La generalización anterior se aplica también para orden cero, lo que conduce a un tensor de una sola componente, correspondiéndose con el concepto de escalar, cuya única componente no varía frente a cambios de ejes. Los tensores de orden uno son evidentemente vectores en su concepción usual.

El lector puede identificar como tensores algunas magnitudes que ya conoce. Por ejemplo, los momentos y productos de inercia de un sólido respecto de los ejes coordenados pueden expresarse en forma compacta como:

$$I_{ij} = \int_{Solido} x_i x_j dm \tag{1.21}$$

siendo dm un elemento diferencial de masa del sólido. El carácter tensorial de la magnitud I_{ij} se demuestra expresándola respecto de unos ejes girados:

$$I_{i'j'} = \int_{Solido} x_{i'} x_{j'} dm = \int_{Solido} a_{i'i} a_{j'j} x_i x_j dm = a_{i'i} a_{j'j} \int_{Solido} x_i x_j dm = a_{i'i} a_{j'j} I_{ij} \qquad (1.22)$$

Otro ejemplo de tensor es el conjunto de las derivadas parciales segundas de una función escalar $f_{,ij}$. En efecto: $f_{,ij} = (f_{,i'}\, x_{i',i})_{,j} = (f_{,i'}\, x_{i',i})_{,j'}\, x_{j',j} = (f_{,i'j'}\, x_{i',i} + f_{,i'}\, x_{i',ij'})\, x_{j',j}$ = (el segundo término del paréntesis contiene una derivada de $a_{i'i}$, que vale cero *si los sistemas de ejes son ambos cartesianos*) = $a_{ii'}\, a_{jj'}\, f_{,i'j'}$. También tiene carácter tensorial el conjunto de coeficientes c_{ij} que relacionan el desplazamiento u_i de un punto con la fuerza aplicada F_j en el mismo punto o en otro punto (siendo $u_i = c_{ij} F_j$), cuando el sólido presenta relación lineal entre cargas y desplazamientos. Existen en la física muchas magnitudes que se ajustan a la definición formal de tensor, habiéndose indicado anteriormente sólo algunos ejemplos. Por ello es de interés extraer las propiedades matemáticas comunes de este tipo de magnitudes.

Cuando planteamos una ecuación, con tensores o sin ellos, debemos comprobar un primer requisito en relación con la invariabilidad de la forma de las ecuaciones que describen los fenómenos físicos: las leyes de la naturaleza operan independientemente del sistema de coordenadas, el cual se introduce por conveniencia (para poder realizar cálculos en forma numérica). Por lo tanto, *la forma* de una ecuación que pretenda representar a una ley de la naturaleza no debe depender del sistema de coordenadas elegido, ya que si se diese esta dependencia esa "ley" no merecería tal nombre, sino que sería simplemente una relación fortuita o circunstancial.

Las ecuaciones escritas en forma tensorial cumplen en efecto con esta premisa básica de invarianza de forma respecto del sistema de coordenadas. El siguiente teorema expresa la invarianza aludida:

> "Sean $B_{ij...k}$ y $C_{ij...k}$ dos tensores. Si la ecuación tensorial $B_{ij...k} = C_{ij...k}$ es cierta en un sistema de coordenadas, entonces es también cierta en cualquier otro sistema de coordenadas."

Este teorema puede demostrarse sin dificultad escribiendo la igualdad como la sustracción de ambos tensores igualada a cero, y haciendo uso de la propiedad, que el lector puede a su vez demostrar, de que si las componentes de un tensor son nulas en un sistema de coordenadas, entonces lo son también en cualquier otro sistema de coordenadas.

Como comentario final acerca de la invarianza de forma de las ecuaciones que representan leyes físicas, llamemos la atención sobre el hecho de que el lector probablemente habrá asumido hace años como natural el que las ecuaciones vectoriales que conoce (la segunda ley de Newton, las ecuaciones de equilibrio estático, ...) sean válidas en cualquier sistema de ejes. Esta aceptación sin recelos por parte del estudiante es debida simplemente al claro sentido físico que cabe atribuir tanto a los vectores como a las operaciones entre ellos. Aunque los tensores de orden superior a uno no cuentan en general con una interpretación física tan inmediata, su utilidad para manejar magnitudes tensoriales es análoga a la utilidad del concepto de vector para manejar las magnitudes vectoriales, que pueden considerarse como un caso particular de tensores.

Operaciones con tensores en coordenadas cartesianas

La suma (o resta) de tensores del mismo orden es un tensor del mismo orden, cuyas componentes son la suma de las componentes correspondientes de los tensores a sumar. La suma de tensores de distinto orden no está definida.

Llamamos producto exterior de dos tensores a su multiplicación cuando ningún subíndice se repite. El resultado es un tensor (demuéstrese) cuyo orden es la suma de los órdenes de los factores. Por ejemplo, $b_{ijk} = c_{ij}\, d_k$ es el producto exterior de c_{ij} y d_k .

La contracción de un tensor es la operación que lleva implícito (según el convenio de suma) el hacer iguales dos subíndices en la notación de un tensor. El resultado de una contracción es un tensor (demuéstrese) de orden el inicial menos dos. Por ejemplo c_{ii} es una contracción cuyo resultado es un tensor de orden 2-2=0 (un escalar).

El producto interior de dos tensores es un producto exterior seguido de una contracción. Por ejemplo $b_{iji} = c_{ij}\, d_i$ es un producto interior de c_{ij} y d_k . El resultado es evidentemente un tensor.

La derivada parcial de un tensor respecto de una coordenada es otro tensor en el ámbito de los tensores cartesianos (solamente). La demostración se realiza derivando directamente un tensor: $b_{i',k'} = (b_i\, x_{i,i'})_{,k'} = (b_i\, x_{i,i'})_{,k}\, x_{k,k'} = (b_{i,k}\, x_{i,i'} + b_i\, x_{i,i'k})\, x_{k,k'}$. El segundo término del último paréntesis se anula por contener una derivada de $x_{i,i'}$ (que en coordenadas cartesianas es constante, de valor $a_{ii'}$). Por lo tanto resulta que

$$b_{i',k'} = x_{i,i'}\, x_{k,k'}\, b_{i,k} \tag{1.23}$$

Lo que muestra que $b_{i,k}$ se transforma como un tensor de segundo orden, pudiendo realizarse con términos de este tipo las operaciones tensoriales que se han definido. La generalización a tensores de orden superior y derivadas sucesivas es inmediata.

Definimos como módulo de un tensor de orden uno, d_i, y lo denotaremos $|d_i|$ al módulo del vector en su sentido habitual. Siendo d_i sus coordenadas cartesianas, tenemos:

$$\left|d_i\right| = \sqrt{d_i d_i} \tag{1.24}$$

El cálculo del módulo conlleva un producto interior, siendo el resultado un escalar. En consecuencia, el subíndice i es mudo en una expresión como $|d_i|$, a pesar de que en la notación adoptada aparezca una sola vez el subíndice.

Existe una propiedad conocida como "Regla del Cociente", la cual no define una operación entre tensores (la división entre ellos no está definida). Dicha propiedad sirve para identificar de modo inmediato el carácter tensorial de una magnitud, y admite diversos enunciados. Para nuestros propósitos, el más interesante será probablemente el que sigue: Si se cumple

$$b_{ij}\ c_j = d_i \tag{1.25}$$

y además es conocido que tanto c_i como d_i son vectores, ello es suficiente para asegurar que b_{ij} es un tensor (se requiere además que c_i sea independiente de b_{ij}). Para probar esta propiedad partimos de (1.25) expresada en unos ejes girados: $b_{i'j'}\ c_{j'} = d_{i'} = a_{i'i}\ d_i = a_{i'i}\ b_{ij}\ c_j = a_{i'i}\ b_{ij}\ a_{j'j}\ c_{j'}$. Esta igualdad se satisfará para unas componentes $c_{j'}$ arbitrarias, por lo que podemos eliminar este símbolo de la igualdad entre el primer y último término de la ecuación anterior, resultando $b_{i'j'} = a_{i'i}\ a_{j'j}\ b_{ij}$, como queríamos demostrar.

El teorema de la divergencia.

Si **f** es cualquier campo vectorial cuyas componentes son diferenciables, que está definido en una región del espacio V limitada por una superficie cerrada S, y **n** es el vector unitario normal exterior a la superficie S un punto considerado, la integral de volumen de la divergencia de **f** (div(**f**)=$f_{i,i}$) puede calcularse mediante una integral de superficie mediante:

$$\int_V f_{i,i} dV = \int_S f_i n_i dS \tag{1.26}$$

Este resultado del cálculo integral, conocido como teorema de la divergencia, será de uso frecuente en los capítulos siguientes.

Bibliografía:

REISMANN, H., & PAWLIK, P., "Elasticity", Wiley - Interscience
FUNG, Y.C., "Foundations of solid mechanics", Prentice-Hall